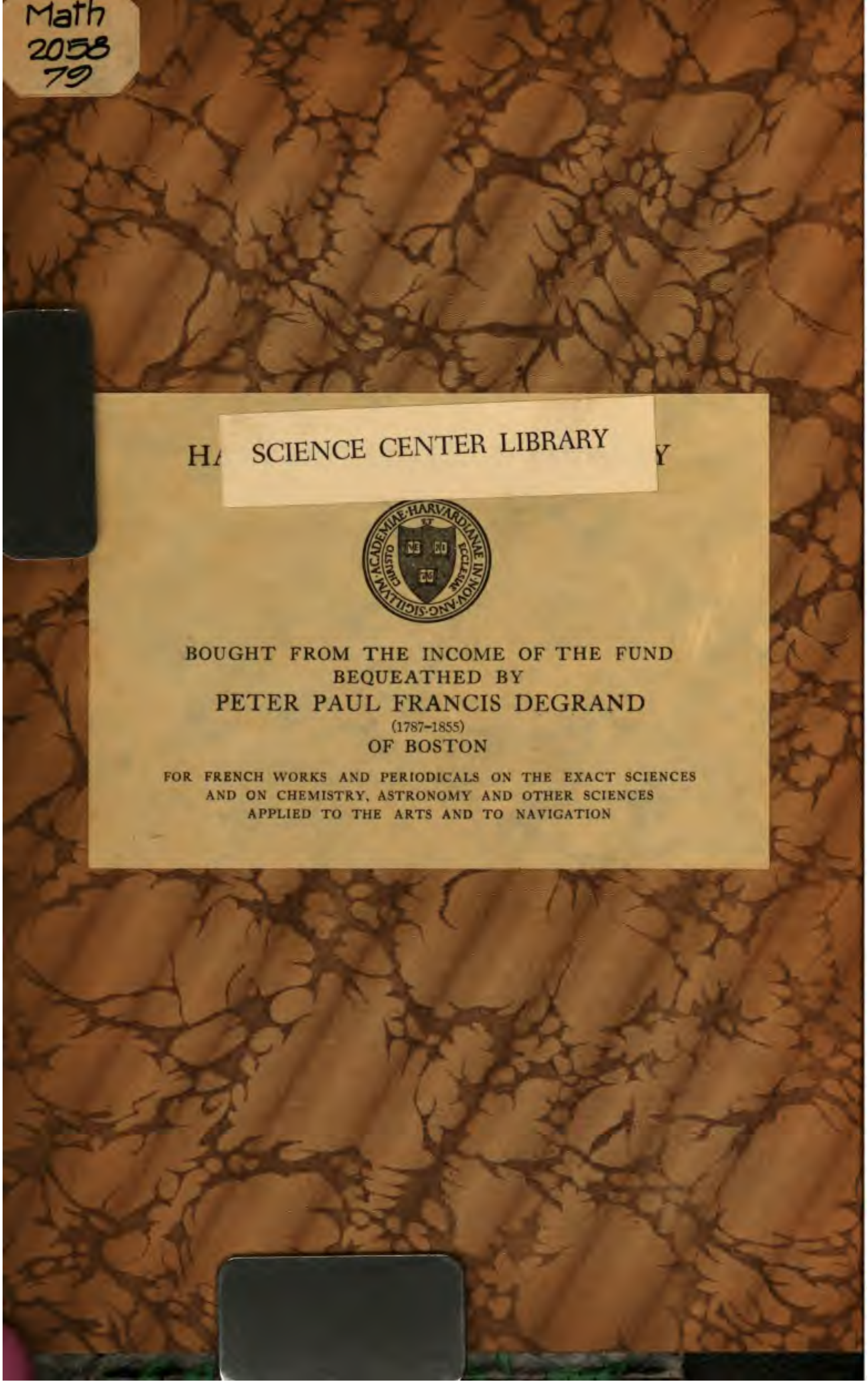


Math
2058
79
HA SCIENCE CENTER LIBRARY Y
CHRISTO ET ECCLESIAE · SIGILLVM · ACADEMIAE · HARVARDIANAE · IN · NOV · ANG ·
VE RI TAS
BOUGHT FROM THE INCOME OF THE FUND
BEQUEATHED BY
PETER PAUL FRANCIS DEGRAND
(1787–1855)
OF BOSTON
FOR FRENCH WORKS AND PERIODICALS ON THE EXACT SCIENCES
AND ON CHEMISTRY, ASTRONOMY AND OTHER SCIENCES
APPLIED TO THE ARTS AND TO NAVIGATION



TRAITÉ

D'ALGÈBRE.

TRAITÉ
D'ALGÈBRE.

PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS,
Quai des Augustins, 55.

TRAITÉ
D'ALGÈBRE,

A L'USAGE

DES CANDIDATS AUX ÉCOLES DU GOUVERNEMENT,

PAR H. LAURENT,
Répétiteur d'Analyse à l'École Polytechnique.

TROISIÈME ÉDITION,

REVUE ET MISE EN HARMONIE AVEC LES NOUVEAUX PROGRAMMES.

PREMIÈRE PARTIE.

A l'usage des classes de Mathématiques élémentaires.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1879

PRÉFACE.

.... Prouver toutes les propositions un peu obscures, et n'employer à leur preuve que des axiomes très-évidents ou des propositions déjà accordées ou démontrées.

(PASCAL, *De l'esprit géométrique*.)

L'édition que je publie aujourd'hui de mon *Traité d'Algèbre* diffère pour la forme des précédentes; mes idées sur l'enseignement de l'Algèbre n'ont pas varié beaucoup quant au fond, mais j'ai dû mettre à profit quelques observations de mes collègues, et surtout les perfectionnements récemment apportés dans les méthodes d'enseignement. C'est ainsi que j'ai pu donner tantôt un tour plus rapide à certaines démonstrations, tantôt plus de rigueur à d'autres qui laissaient un peu à désirer sous ce rapport. Enfin, j'ai cru devoir augmenter beaucoup le nombre des Exercices proposés, en donnant une solution très-sommaire de quelques-uns d'entre eux et en y joignant des Notes sur des questions étrangères aux programmes, mais qui m'ont paru instructives et intéressantes. On voudra bien remarquer, d'ailleurs, que les exercices que je propose sont le plus souvent tirés des œuvres des grands maîtres.

Je veux maintenant me justifier de quelques re-

proches qui m'ont été adressés et dont je n'ai pas cru devoir tenir compte.

On a critiqué la façon dont j'entrais en matière (mais je dois dire que beaucoup de professeurs m'ont approuvé); on prétend qu'il est difficile de donner dès le début des notions exactes sur les quantités *négatives* et qu'il faut rejeter leur théorie après les équations du premier degré.

Je réponds à cela que la quantité négative n'est pas plus difficile à saisir que la quantité positive, et que $+3$ est aussi absurde que -3 au point de vue concret. Tout élève comprendra parfaitement que l'on peut appeler *quantité algébrique* un nombre précédé d'un signe, pourvu que ce nombre et ce signe fassent partie d'une formule. Ainsi, dans $2+3-4$, je dis que -4 est un terme négatif du polynôme $2+3-4$. Il n'est pas difficile non plus de faire comprendre que $(+3)\times(-2)=-3\times 2$ est une définition. Je ne tarde pas à montrer que le but de pareilles définitions est de simplifier les énoncés de certains théorèmes. L'interprétation vient plus tard, mais jamais la quantité négative n'a apparu comme une chose absurde.

Au contraire, ceux qui ne veulent pas entendre parler de quantités négatives au commencement de l'Algèbre ne font que tromper les élèves et leur donner des idées fausses, en leur cachant l'absurde et en les faisant passer outre quand ils le rencontrent.

Par exemple, comment est-il permis de dire que l'on peut faire passer un terme d'une équation d'un membre dans un autre en changeant son signe avant

d'avoir parlé des quantités positives et négatives? Je suppose qu'il s'agisse de résoudre

$$1 - x = 5 - 2x.$$

La solution est $x = 4$; mais, si l'élève ne sait pas ce que c'est qu'une quantité négative, cette équation, *a priori*, n'a pas de sens, car, quand $x = 4$, on a

$$1 - 4 = 5 - 8.$$

Mais encore, si vous écrivez, je suppose, cette autre équation

$$x - 1 = 2x - 5,$$

pouvez-vous faire passer x d'un membre dans un autre? Savez-vous d'avance si l'opération sera possible? Etc., etc. On croit avoir fait un chef-d'œuvre en passant du simple au composé; mais c'est aux dépens du bon sens, en trompant l'élève et en lui faussant le jugement.

J'ai souvent entendu dire dans le monde que l'étude des Mathématiques rendait l'esprit faux : c'est parfaitement exact si on les enseigne mal et si l'on exerce les élèves à ne pas apercevoir les fautes grossières de raisonnement que l'on fait devant eux.

Telle que je l'expose, la théorie des imaginaires ne laisse aucun nuage dans l'esprit; dans une Note placée à la suite du Chapitre VII, j'ai indiqué sommairement une manière différente de présenter cette théorie. Croit-on aussi rectifier le jugement des élèves quand on leur dit que l'on convient de considérer $\sqrt{-1}$ comme une quantité qui aurait pour carré -1?

Pourquoi ne peut-on pas convenir aussi qu'en ajoutant 2 et 2 on obtiendra 10?

Plusieurs absurdités ont déjà disparu de l'enseignement : les séries divergentes, l'infini en tant que quantité déterminée très-grande, etc. Il faut espérer qu'on fera disparaître aussi les théories qui font de $\sqrt{-1}$ une quantité dénuée de sens.

Dans cette édition, je me suis mieux conformé aux programmes officiels que dans les précédentes; j'ai développé plus simplement et plus complétement la théorie des déterminants, la théorie des fonctions dérivées et celle de l'élimination. Enfin, on voudra bien remarquer le dernier Chapitre sur les polynômes homogènes du second degré et leurs applications à la séparation des racines des équations; cette théorie m'a paru une bonne préparation à l'étude des coniques et des surfaces du second ordre, indépendamment des immenses services que la loi dite *de l'inertie* est appelée à rendre à la théorie des équations.

Que l'on me permette à ce propos une digression : plus d'une théorie importante a été portée à un haut degré de perfection lorsqu'elle a été régulièrement introduite dans l'enseignement, et, quand on compare cette théorie avec ce qu'elle était cinq ou six ans auparavant, on y rencontre des énoncés plus nets et plus féconds, une précision et une rigueur qui en ont fait un instrument riche et puissant. C'est ainsi que la théorie de l'élimination s'est bien perfectionnée depuis qu'elle est exigée pour l'entrée à l'École Polytechnique. Je suis convaincu que, si nos professeurs voulaient introduire peu à peu la théorie des formes

quadratiques dans leur enseignement, comme ils ont introduit autrefois celle des déterminants, on verrait cette théorie faire faire à l'Analyse des progrès prodigieux.

Le jour n'est peut-être pas éloigné où l'on pourra substituer au théorème de Sturm, déjà si riche en conséquences, une méthode réellement pratique pour la séparation sûre et rapide des racines d'une équation.

Que l'on veuille bien se rappeler combien les élèves redoutaient autrefois l'introduction des déterminants dans les Cours de Mathématiques spéciales. Que de récriminations n'entendrait-on pas aujourd'hui si on les empêchait de se servir de ce précieux instrument, qui vient si à propos soulager leur mémoire et leur attention! Peut-être n'est-il pas inutile de rappeler que c'est M. Moutard qui a surtout contribué par son enseignement à la vulgarisation de la théorie des déterminants.

INTRODUCTION.

DES LIMITES ET DES INCOMMENSURABLES (*).

On appelle *limite* d'une quantité variable une quantité fixe dont la quantité variable s'approche indéfiniment, de manière que leur différence ait une valeur susceptible de devenir aussi petite que l'on veut.

Ainsi, par exemple, 1 est la limite des fractions proprement dites constamment croissantes; $\frac{1}{3}$ est la limite vers laquelle tendent les fractions 0,3, 0,33, 0,333, ..., lorsque le nombre de leurs chiffres 3 augmente indéfiniment, etc.

Théorème I. — *Lorsqu'une quantité croît constamment sans devenir plus grande qu'une quantité fixe, elle a une limite.*

En effet, on voit qu'il existera une quantité fixe que la quantité variable ne pourra pas surpasser, mais telle, que toute quantité fixe inférieure pourra être égalée par la variable : cette quantité est évidemment la limite de la quantité variable en question.

Théorème II. — *Lorsqu'une quantité décroît sans cesse*

(*) La place de cette introduction serait, en Arithmétique, un peu avant la théorie de la racine carrée; les auteurs des programmes officiels ont disposé les choses autrement.

sans pouvoir devenir moindre qu'une quantité fixe donnée, cette quantité variable a une limite.

En effet, cette limite est évidemment la plus petite des quantités à laquelle la variable ne peut devenir inférieure.

Théorème III. — *Si deux quantités sont constamment égales, si l'une d'elles admet une limite, l'autre en admet une aussi, et ces deux limites sont égales.*

En effet, soient a et b les quantités variables et A la limite de a; $A - a$ peut devenir moindre en valeur absolue que toute quantité donnée. Il en sera de même de $A - b$, qui lui est égal; donc, par définition, A est la limite de b.

C. Q. F. D.

On appelle *commune mesure* entre deux quantités A et B de même espèce une quantité C qui est contenue un nombre exact de fois dans A et dans B.

Pour trouver une commune mesure entre A et B, on peut d'abord chercher si la plus petite B de ces quantités est contenue un nombre exact de fois dans A; s'il en était ainsi, B serait la commune mesure cherchée; sinon, on peut diviser B successivement en deux, trois, quatre, ... parties égales, et chercher si l'une de ces parties est contenue un nombre exact de fois dans A. Mais il peut arriver que, quelque grand que soit le nombre entier n, la $n^{\text{ième}}$ partie de B ne soit jamais contenue un nombre exact de fois dans A; on dit alors que A et B *n'ont pas de commune mesure* ou sont incommensurables.

Pour trouver une commune mesure entre A et B, on peut suivre un procédé analogue à celui qui fournit en Arithmétique le plus grand commun diviseur. A cet effet, on retranche de A la plus petite B des deux quantités en question autant de fois qu'on le peut; on trouve alors que

(1) $\quad A = q$ fois B + un reste R moindre que B,

q désignant un certain nombre entier. On retranche ensuite R de B autant de fois que l'on peut, et l'on trouve alors, par exemple,

$$(2) \qquad B = q' \text{ fois } R + \text{un reste } R' \text{ moindre que } R.$$

On retranche ensuite R′ de R autant de fois qu'on le peut, et l'on trouve ainsi

$$(3) \qquad R = q'' \text{ fois } R' + \text{un reste } R'' \text{ moindre que } R',$$

et ainsi de suite. Il peut se faire que l'un des restes R, R′, R″,... soit nul, et alors le reste précédent est la commune mesure. En effet, supposons R‴ nul, R′ sera alors égal à un nombre exact q''' de fois R″, et l'égalité (3) nous montre que R est égal à q'' fois R′, c'est-à-dire $q'' \times q'''$ fois R″ plus une fois R″, c'est-à-dire $q'' q''' + 1$ fois R″. L'égalité (2) montre ensuite que B est égal à $q'(q'' q''' + 1) + 1$ fois R″; enfin l'égalité (1) montre que A est égal à

$$q[q'(q'' q''' + 1) + 1]$$

fois R″ : R″ est donc une commune mesure entre A et B.

Ajoutons que le procédé que nous venons d'indiquer a l'avantage de faire connaître la plus grande commune mesure entre A et B; il est facile de le prouver en suivant le même mode de démonstration qu'en Arithmétique, lorsqu'il s'agit de trouver le plus grand commun diviseur entre deux nombres.

Lorsque les quantités A et B n'ont pas de commune mesure, le procédé que nous venons de suivre, pris à la lettre, ne permet pas d'affirmer qu'il en est ainsi; les opérations, à la vérité, ne se terminent pas, mais rien ne prouve qu'elles ne se termineront pas après un temps plus ou moins long.

En Arithmétique, on a donné les définitions suivantes :

Mesurer une quantité A, c'est chercher combien de fois elle contient une quantité de même espèce B prise pour unité ou combien de fois elle contient une certaine partie de B divisé en parties égales; le résultat de cette opération est ce que l'on appelle un *nombre* entier ou fractionnaire. Le *nombre* qui mesure une quantité A est donc ce qui nous définit la relation de grandeur entre la quantité en question A et son unité B, ou, si l'on veut, ce qui exprime le *rapport* de A à B.

D'après la définition donnée en Arithmétique, il n'existe pas de nombre mesurant une quantité A incommensurable avec son unité, car, s'il existait une fraction $\frac{p}{q}$ mesurant le nombre A, A contenant p fois la $q^{\text{ième}}$ partie de l'unité, cette $q^{\text{ième}}$ partie de l'unité serait une commune mesure entre A et l'unité.

Cependant il existe certainement une relation de grandeur entre A et l'unité : voici comment on peut la définir.

Partageons l'unité en n parties égales; A contiendra, par exemple, m de ces parties, mais n'en contiendra pas $m+1$; $\frac{m}{n}$ et $\frac{m+1}{n}$ mesurent donc deux quantités commensurables P et Q telles, que

$$P < A < Q,$$

et différant de A d'une quantité moindre que la $n^{\text{ième}}$ partie de l'unité, c'est-à-dire différant de A d'aussi peu que l'on veut, puisque l'on peut choisir n aussi grand que l'on veut. Soit $n' > n$, et supposons que A contienne m' fois la $n'^{\text{ième}}$ partie de l'unité et ne la contienne pas $m'+1$ fois; $\frac{m'}{n'}$ et $\frac{m'+1}{n'}$ mesureront des quantités commensurables P' et Q' telles, que

$$P' < A < Q'.$$

La différence entre P' et A pourra être prise moindre que la $n'^{ième}$ partie de l'unité, et, par conséquent, en prenant n' assez grand, P' pourra être compris entre P et A, et, par conséquent, le nombre $\frac{m'}{n'}$ sera plus grand que $\frac{m}{n}$. On déterminerait de la même façon un nombre $\frac{m''}{n''}$ plus grand que $\frac{m'}{n'}$ et mesurant une quantité P'' comprise entre P' et A, etc. Les nombres $\frac{m}{n}, \frac{m'}{n'}, \frac{m''}{n''}, \ldots$ sont ce que l'on peut appeler les *mesures approchées de* A. Ils ont une limite; cette limite est ce que l'on appelle le nombre *incommensurable qui mesure* A. En effet, ces nombres vont en croissant et restent toujours inférieurs à $\frac{m+1}{n}$ qui mesure Q plus grand que A.

Soit $\frac{\mu}{\nu}$ une fraction définie par la condition que A soit compris entre μ fois et $\mu+1$ fois la $\nu^{ième}$ partie de l'unité; il est facile de prouver que la limite vers laquelle tend $\frac{\mu}{\nu}$ est le nombre a qui mesure A lorsque ν croît indéfiniment. En effet, soient R la grandeur mesurée par $\frac{\mu}{\nu}$ et S celle qui est mesurée par $\frac{\mu+1}{\nu}$; on a

$$R < A < S.$$

La différence entre R et A est moindre que la $\nu^{ième}$ partie de l'unité; la différence entre P et A est moindre que la $n^{ième}$ partie de l'unité; donc entre P et R la différence est moindre que la $n^{ième}$ partie de l'unité, en supposant, par exemple, ν plus grand que n. Mais quand on fait croître n et ν indéfiniment, ν suivant une loi quelconque et n en

le faisant passer par les valeurs n', n'',... définies tout à l'heure, les nombres $\frac{m}{n}$ et $\frac{\mu}{\nu}$ qui mesurent P et R diffèrent de moins de $\frac{1}{n}$, c'est-à-dire que leur différence peut être prise aussi petite que l'on veut. Or $\frac{m}{n}$ a pour limite a, c'est-à-dire peut en différer d'aussi peu que l'on veut. $\frac{\mu}{\nu}$ peut différer de $\frac{m}{n}$ d'aussi peu que l'on veut; donc il peut aussi différer de a d'aussi peu que l'on veut; en d'autres termes, $\frac{\mu}{\nu}$ a pour limite a.

$\frac{\mu+1}{\nu}$ a aussi pour limite a; car $\frac{\mu+1}{\nu}$ diffère de $\frac{\mu}{\nu}$, de $\frac{1}{\nu}$, que l'on peut prendre aussi petit que l'on veut.

Il résulte de là que, pour définir le nombre incommensurable qui mesure une quantité A incommensurable avec son unité, il suffit d'indiquer quelles sont les fractions mesurant les quantités inférieures à A et commensurables avec l'unité, ou supérieures à A et commensurables avec l'unité.

Les définitions des mots *somme, différence,* adoptées pour les nombres commensurables, s'appliquent avec lucidité aux nombres incommensurables : il n'en est pas de même du mot *produit*.

Nous définirons le produit de deux incommensurables A et B en désignant les nombres commensurables inférieurs et supérieurs à ce produit. En désignant par a et b les nombres commensurables inférieurs à A et B ayant pour limite A et B, par a' et b' des nombres commensurables supérieurs à A et B ayant pour limite A et B, il est clair que $a'b'$ sera plus grand que ab; or, a et b croissant et tendant vers leurs limites, ab croît. Comme il ne peut jamais

surpasser $a'b'$, il a une limite ; de même $a'b'$ a une limite : il est facile de voir que ces limites sont égales. En effet, soient α la différence entre a et a', β celle entre b et b'; on a

$$(1) \qquad a'b' - ab = (a + \alpha)\,b' - (b' - \beta)\,a.$$

Mais b' est une fraction ; supposons-la égale à $\frac{2}{3}$. Multiplier $a + \alpha$ par $\frac{2}{3}$, c'est en prendre les $\frac{2}{3}$. Or $\frac{a}{3} + \frac{\alpha}{3}$ représente le tiers de $a + \alpha$, car, en ajoutant $\frac{a}{3} + \frac{\alpha}{3}$ trois fois à lui-même, on reproduit $a + \alpha$. En ajoutant deux fois $\frac{a}{3} + \frac{\alpha}{3}$ à lui-même, on a les $\frac{2}{3}$ de $a + \alpha$, et l'on trouve

$$\frac{2a}{3} + \frac{2\alpha}{3} \quad \text{ou} \quad b'a + b'\alpha.$$

On prouverait d'une manière semblable que $(b' - \beta)\,a$ est égal à $b'a - \beta a$; la formule (1) donne alors

$$a'b' - ab = \alpha b' + a\beta.$$

Or α et β peuvent être pris aussi petits que l'on veut; le second membre de la formule précédente peut donc être rendu aussi petit que l'on veut, et, par suite, $a'b'$ et ab peuvent être pris aussi peu différents l'un de l'autre que l'on veut, ce qui revient à dire que leurs limites sont égales.

La limite commune de ab et de $a'b'$ est ce que l'on appelle le produit de A par B; on le désigne toujours par la notation $A \times B$ ou AB, et comme ab est toujours égal à ba, leurs limites AB et BA sont égales.

THÉORÈME. — *Un produit de plusieurs facteurs incommensurables ne change pas quand on intervertit l'ordre des facteurs.*

En effet, soient a, b, c, d, ... des quantités inférieures à A, B, C, D, ... respectivement; le produit ABC est la limite vers laquelle tend le produit $ab \times c$ ou abc; de même ABCD est la limite vers laquelle tend $abc \times d$ ou $abcd$.... Or, par exemple, $abcd$ est égal à $acdb$; donc leurs limites ABCD, ACDB sont égales. C. Q. F. D.

Le *quotient* de deux incommensurables appelées *dividende* et *diviseur* est un nombre qui, multiplié par le diviseur, reproduit le dividende.

Soient D le dividende, d le diviseur; je dis que le quotient existe toujours. En effet, soient Δ, Δ', δ, δ' des quantités commensurables satisfaisant aux relations

$$\Delta > D > \Delta', \quad \delta > d > \delta';$$

on trouvera toujours deux nombres q et q' satisfaisant aux relations

$$(1) \qquad \Delta = \delta' q, \quad \Delta' = \delta q'.$$

Si l'on fait tendre Δ et Δ' vers D, δ et δ' vers d, q diminue, q' augmente, mais on a toujours $q > q'$; donc q et q' ont chacun une limite. Je dis que ces limites sont égales; en effet, en appelant r la différence entre Δ et Δ', et s la différence entre δ et δ', on a, au lieu des formules (1),

$$\Delta = (\delta - s)q, \quad \Delta + r = \delta q',$$

et, en retranchant membre à membre,

$$r = \delta q' - (\delta - s)q.$$

En faisant usage d'un raisonnement déjà fait à propos

de la multiplication des incommensurables, on a

$$r = \delta q' - (\delta q - sq),$$

ou bien

$$r = \delta q' - \delta q + sq.$$

Mais, s et r pouvant être pris aussi petits que l'on veut, $\delta q'$ et δq peuvent être pris aussi voisins l'un de l'autre que l'on veut, et par suite q et q' aussi, ce qui prouve bien l'existence d'un quotient unique.

TRAITÉ
D'ALGÈBRE.

PREMIÈRE PARTIE.

CHAPITRE PREMIER.
NOTIONS FONDAMENTALES.

I. — PRÉLIMINAIRES.

Il est difficile de donner une définition bien nette et bien précise de l'objet de l'Algèbre ; toutefois, on peut dire que la science des nombres comprend l'Arithmétique et l'Algèbre.

L'Arithmétique a pour but de trouver des nombres inconnus d'après leur mode de dépendance avec d'autres nombres donnés.

L'Algèbre, au contraire, a pour but « de trouver le système d'opérations à faire sur des quantités données pour en déduire les valeurs des quantités que l'on cherche... Le tableau de ces opérations... est ce que l'on appelle une *formule* » (LAGRANGE, *De la résolution des équations numériques*).

Ainsi, quand on dit que, connaissant le prix d'un objet, pour avoir le prix d'un certain nombre d'objets de même espèce il faut multiplier le nombre de ces objets par le prix de chacun d'eux, on fait de l'Algèbre; au contraire, quand on dit que, le prix d'un objet étant 2 francs, le prix de trois objets de même espèce est de 6 francs, on fait de l'Arithmétique.

La plupart des Traités d'Algèbre contiennent de nombreuses théories purement arithmétiques.

Algèbre vient des mots arabes *algebr v almocabelah,* qui signifient *opposition et comparaison;* on en a fait en latin *algebra et almucabala.* C'est évidemment à tort que l'on a voulu faire dériver *algèbre* de *Geber,* nom d'un mathématicien arabe.

C'est dans le Traité de Mohamed ben Musa (IX[e] siècle) « que nous avons puisé nos premières connaissances algébriques, d'abord par l'entremise de Léonard de Pise, qui avait été s'instruire en Arabie, ensuite en l'ayant nous-mêmes et en le traduisant au XIII[e] siècle. De là, on a regardé Mohamed ben Musa comme l'inventeur de l'Algèbre... On sait que Mohamed avait tiré des Indiens une partie de ses connaissances mathématiques; nous devons penser que c'est d'eux qu'il reçut l'Algèbre. » (CHASLES, *Aperçu historique,* p. 490.)

« ... Brahmegupta et Bhascara, le premier au VI[e], le second au XII[e] siècle », ont publié des Ouvrages qui « traitent de l'Arithmétique, de l'Algèbre et de la Géométrie. L'Arithmétique et l'Algèbre en sont la partie la plus considérable et confirment pleinement l'opinion émise en faveur des Indiens comme inventeurs de ces deux branches de la science. » (*Id.,* p. 418.)

Quelques écrivains « avaient regardé Diophante d'Alexandrie (IV[e] siècle) comme le premier inventeur de l'Algèbre.... Mais aujourd'hui la question de priorité est

entre les Grecs et les Hindous. Le Livre de Brahmegupta est postérieur de deux siècles à celui de Diophante, mais la perfection de son Ouvrage annonce certainement que l'Algèbre avait déjà une existence très-ancienne dans l'Inde. » (*Id.*, p. 489.)

L'Algèbre des anciens différait beaucoup de l'Algèbre moderne, dont l'origine remonte à Viète, qui a le premier eu l'idée de représenter dans les calculs les nombres par des lettres.

II. — DES QUANTITÉS ALGÉBRIQUES.

En Algèbre comme en Arithmétique, nous ferons usage des signes + et — pour exprimer que les nombres séparés par ces signes doivent être ajoutés ou retranchés l'un de l'autre. Les nombres qui, dans une formule, ne sont précédés d'aucun signe, ou qui sont précédés du signe +, sont appelés *quantités positives;* ceux qui sont précédés du signe — sont appelés *quantités négatives.*

On considère souvent les quantités algébriques indépendamment des formules dans lesquelles elles doivent entrer; mais, quand nous parlerons dorénavant d'une quantité négative, il faudra toujours sous-entendre qu'elle fait partie d'une formule sans laquelle cette quantité n'offrirait aucun sens net à l'esprit. Ainsi, par exemple, quand nous parlerons de la quantité -4, nous devrons toujours supposer une formule, par exemple

$$5-4=1, \quad 2+7-4=5, \quad \ldots,$$

dont -4 fasse partie, sans qu'il soit cependant nécessaire de préciser la formule en question. On conçoit, en effet, que le signe — placé devant le chiffre 4 donne à ce chiffre certaines propriétés dont il jouira, quelle que soit la formule dans laquelle il se trouve écrit. Ce que nous venons

de dire du symbole — 4 pourrait se répéter de cet autre + 4, que l'on ne saurait concevoir que comme faisant partie d'une formule existante.

On appelle *valeur absolue* et quelquefois aussi *module* d'une quantité positive ou négative le nombre précédé du signe + ou — qui entre dans cette quantité.

On dit que deux quantités sont *égales* lorsque leurs valeurs absolues sont égales et que leurs signes sont les mêmes; cette égalité algébrique s'exprime à l'aide du signe =, qui n'amène aucune confusion si nous convenons de regarder comme précédées du signe + les quantités arithmétiques qui n'ont pas de signe.

On convient de regarder les quantités négatives comme plus petites que zéro, et d'autant plus petites que leur valeur absolue est plus grande, et l'on conserve les signes $<$, $>$ de l'Arithmétique pour exprimer qu'une quantité positive ou négative est plus petite ou plus grande qu'une autre.

Ces conventions n'ont d'autre but que de simplifier le langage et d'éviter de longues périphrases; on finit par s'y accoutumer, et l'on y trouve souvent le grand avantage de comprendre dans un seul énoncé plusieurs propositions qui sans cela nécessiteraient autant d'énoncés distincts.

III. — ADDITION.

L'*addition algébrique* est une opération qui a pour but de faire la *somme algébrique* de deux ou plusieurs quantités.

On appelle *somme algébrique* de deux quantités de même signe la somme de leurs valeurs absolues précédée du signe commun; la *somme algébrique* de deux quantités de signes contraires est la différence de leurs valeurs absolues précédée du signe de la plus grande.

Ainsi la somme de -4 et -5 est -9, la somme de -4 et $+5$ est $+1$, celle de $+4$ et -6 est -2.

La somme de plusieurs quantités telles que -1, $+2$, -4, $+7$ est le résultat obtenu en ajoutant la première et la seconde, puis la troisième à la somme des deux premières, puis la quatrième à la somme des trois premières, etc.

Pour indiquer que plusieurs quantités doivent être ajoutées, on fait usage du signe $+$; ainsi

$$(-2)+(-4)+(+5)$$

représente le résultat obtenu en ajoutant -2 à -4 et $+5$ à la somme ainsi obtenue. Le plus souvent, on se contente d'écrire les quantités les unes à la suite des autres sans changer les signes; ainsi

$$-2+4-5$$

est équivalent à

$$(-2)+(+4)+(-5).$$

Le symbole $3+6-4+1-2$, qui en Arithmétique représente une suite de sommes et de différences, et en Algèbre une somme, conduit dans les deux sciences au même résultat lorsqu'il est arithmétiquement possible, ce qui est très-avantageux au point de vue des applications.

Quelquefois on désigne une quantité positive ou négative telle que -4 par une seule lettre a. Pour exprimer que plusieurs quantités $a, b, c, \ldots$ doivent être ajoutées, on les sépare les unes des autres par le signe $+$, ainsi : $a+b+c+\ldots$ [1].

LEMME I. — *Soit* N *un nombre plus grand que les va-*

[1] On pourra à une première lecture passer les lemmes et remarques suivantes, et admettre le théorème I sans démonstration.

leurs absolues de a et de a'; si l'on a

$$(1) \qquad N + a = N + a',$$

on aura $a = a'$.

D'abord je dis que les signes de a et a' sont les mêmes, car si, par exemple, a était négatif et a' positif, en mettant les signes de a et a' en évidence et en appelant α et α' leurs valeurs absolues, on aurait

$$N - \alpha = N + \alpha',$$

ce qui est absurde, car le premier membre est plus petit que le second. Les signes de a et a' étant les mêmes, la formule (1) revient à $N + \alpha = N + \alpha'$ ou à $N - \alpha = N - \alpha'$, ce qui ne peut avoir lieu que si $\alpha = \alpha'$. Donc a et a' sont égaux en valeur absolue et en signe. C. Q. F. D.

LEMME II. — *Si* N *est plus grand en valeur absolue que a, b et $a + b$, on aura*

$$N + (a + b) = N + a + b;$$

en explicitant les signes de a et b, cette formule revient aux quatre suivantes, où α et β sont les valeurs absolues de a et b :

$$(1) \qquad N + (+\alpha + \beta) = N + \alpha + \beta,$$
$$(2) \qquad N + (-\alpha + \beta) = N - \alpha + \beta,$$
$$(3) \qquad N + (+\alpha - \beta) = N + \alpha - \beta,$$
$$(4) \qquad N + (-\alpha - \beta) = N - \alpha - \beta.$$

La formule (1) est évidente, car, $+\alpha + \beta$ étant positif, pour l'ajouter à N, il faut faire l'opération arithmétique qui est l'addition de la somme $\alpha + \beta$, ou, ce qui revient au même, ajouter α puis β. Pour démontrer la formule (2), on observe que $-\alpha + \beta$ est égal à $+(\beta - \alpha)$ si $\beta > \alpha$ et à

$-(\alpha-\beta)$ si $\alpha>\beta$; on doit donc, dans le premier cas, ajouter $\beta-\alpha$ à N, ce qui revient à lui retrancher α, puis à lui ajouter β, et dans le second cas lui retrancher $\alpha-\beta$, ce qui se fera en retranchant α et en ajoutant β au résultat; donc, en tout cas, la formule (2) est exacte. La formule (3) revient à (2), car $+\alpha-\beta=-\beta+\alpha$ d'après la définition même de l'addition de deux quantités, définition dans laquelle l'ordre n'intervient pas. Enfin, la formule (4) se démontre en observant que $-\alpha-\beta$ est égal à $-(\alpha+\beta)$ et qu'ajouter $-(\alpha+\beta)$ à une quantité positive plus grande N, c'est en retrancher $\alpha+\beta$, ce qui donne

$$N-\alpha-\beta.$$

Remarque. — Il est indispensable de bien observer que les lemmes précédents, évidents si a, b étaient des *nombres*, ne le sont plus si a, b sont des *quantités algébriques*. En ce moment, nous ne prenons pas dans son acception ordinaire le mot *ajouter;* d'ailleurs, il s'applique à autre chose qu'à des nombres, de sorte qu'une démonstration est nécessaire pour établir des faits qui seraient de toute évidence si a, b étaient des *nombres* et si nous avions conservé au mot *ajouter* son sens vulgaire.

Théorème I. — *Une somme ne change pas de valeur quand on intervertit l'ordre de ses parties.*

Considérons, en effet, la somme $a+b+c+d$. Soit N un nombre positif assez grand pour que N surpasse les sommes que l'on peut faire avec a, b, c, d en les prenant 1 à 1, 2 à 2, 3 à 3 et 4 à 4, dans un ordre quelconque; nous aurons, en vertu de notre lemme II,

$$\begin{aligned} N+(a+b+c+d) &= N+(a+b+c)+d \\ &= N+(a+b)+c+d \\ &= N+a+b+c+d; \end{aligned}$$

mais il est clair que, quels que soient les signes de a, b, c, d, on a, par exemple,

$$N + a + b + c + d = N + b + d + c + a$$

(chacune des opérations indiquées étant arithmétiquement possible et l'addition d'une quantité négative revenant toujours ici à une soustraction); donc aussi

$$N + (a + b + c + d) = N + (b + d + c + a),$$

et, en vertu du lemme I,

$$a + b + c + d = b + d + c + a.$$

Le théorème est donc démontré.

Théorème II. — *Pour ajouter une somme à une quantité, il suffit de lui ajouter successivement chacune de ses parties.*

En effet, proposons-nous d'ajouter $a + b + c$ à P, le résultat sera

$$P + (a + b + c) \quad \text{ou} \quad (a + b + c) + P.$$

Mais on peut supprimer la parenthèse dans cette dernière formule, car elle exprime qu'au résultat obtenu en ajoutant b à a et c à la somme ainsi obtenue il faut encore ajouter P, ce qu'exprime également le symbole

$$a + b + c + P,$$

que l'on peut aussi écrire

$$P + a + b + c,$$

en vertu du principe précédent; donc, etc. C. Q. F. D.

Théorème III. — *Une somme algébrique peut s'obtenir en ajoutant séparément les quantités de même signe, en*

faisant la différence des résultats obtenus et en donnant à cette différence le signe du plus grand.

En effet,

$$a + b - c + d - f = a + b + d - c - f,$$

et, en vertu du principe précédent,

$$\begin{aligned} a + b - c + d - f &= (a + b + d) + (-c - f) \\ &= (a + b + d) - (c + f), \end{aligned}$$

ce qui démontre le principe en question.

Théorème IV. — *Pour changer le signe d'une somme algébrique, il suffit de changer le signe de chacune de ses parties.*

En effet, pour faire la somme de plusieurs quantités, on ajoute les quantités de même signe, on fait la différence des résultats A et B, on donne à cette différence le signe du plus grand de ces deux résultats. Or, en changeant les signes de tous les termes de la somme, on change les signes de A et de B, et par suite le signe que l'on doit donner à leur différence, qui est la somme algébrique en question.

IV. — SOUSTRACTION.

La *soustraction* algébrique est une opération qui a pour but, étant donnée une somme et l'une de ses parties, de trouver l'autre, que l'on appelle *reste* ou *différence*.

Théorème. — *Pour soustraire une quantité algébrique d'une autre, il suffit de l'ajouter à celle-ci en changeant son signe.*

En effet, soit à soustraire $-\beta$ de α, par exemple; je dis que le résultat sera $\alpha + \beta$ (les signes de α et β sont censés

en évidence). D'abord il est facile de vérifier que $\alpha + \beta$ est tel, que si l'on y ajoute $-\beta$ on retrouve α; en effet, $\alpha + \beta - \beta$ est égal à $\beta - \beta + \alpha$, c'est-à-dire à $0 + \alpha$ ou à α. La même vérification se ferait pour d'autres combinaisons de signes.

Il reste à prouver qu'il n'existe pas d'autre nombre que $\alpha + \beta = \gamma$ tel que si l'on y ajoute $-\beta$ on retrouve α; ce fait est facile à établir. En effet, supposant par exemple γ positif, il n'est pas possible qu'un autre nombre positif δ donne $\delta - \beta = \gamma - \beta$, car les différences des valeurs absolues de δ et β, de γ et β ne peuvent être les mêmes si δ et γ sont tous deux plus grands ou tous deux plus petits que β; s'ils sont l'un plus petit, l'autre plus grand que β, ce seront les signes des résultats qui seront différents.

On voit de même que $\alpha + \beta$ ne saurait être négatif et égal à $-\delta$, car $-\delta - \beta$ serait plus grand en valeur absolue que $\gamma - \beta$.

V. — MULTIPLICATION ET DIVISION.

Multiplication. — Multiplier algébriquement une quantité par une autre, c'est faire le produit de leurs valeurs absolues et donner au résultat le signe $+$ si elles ont le même signe et le signe $-$ si elles sont de signes contraires. Les dénominations de *multiplicande, multiplicateur, facteurs, produit* s'appliquent à la multiplication algébrique comme à la multiplication arithmétique.

On donne quelquefois la définition de la multiplication sous forme de règle, en disant d'une manière abrégée que

$+$	multiplié par	$+$	donne	$+$,
$+$	»	$-$	»	$-$,
$-$	»	$+$	»	$-$,
$-$	»	$-$	»	$+$.

C'est en cela que consiste ce que l'on appelle souvent la *règle des signes;* d'après cette règle, on voit, par exemple, que — 7 multiplié par + 4 donne — 28, que — 5 multiplié par — 6 donne + 30, etc. Lorsqu'une seule lettre désigne une quantité avec son signe, on exprime que plusieurs quantités doivent être multipliées entre elles en les séparant par le signe $\times$, par un point, ou encore en les écrivant sans aucun signe les unes à la suite des autres; ainsi

$$a \times b \times c, \quad a.b.c, \quad abc$$

sont trois notations qui indiquent que l'on doit multiplier la quantité a par b et le résultat par c. Quand un des facteurs est un nombre positif et l'autre une lettre, on ne met ordinairement pas de signe entre le multiplicande et le multiplicateur. On conçoit que cette convention ne saurait s'appliquer à plusieurs facteurs numériques d'un même produit; en effet, 23, par exemple, offrirait un sens ambigu et représenterait également les deux nombres 6 et (20 + 3).

Division. — La *division algébrique* est une opération qui a pour but, étant donné un produit de deux facteurs appelé *dividende* et l'un de ses facteurs appelé *diviseur,* de trouver l'autre appelé *quotient.*

Le quotient de deux quantités algébriques est égal au quotient de leurs valeurs absolues précédé du signe + si elles ont le même signe et du signe — si elles sont de signes contraires.

Le quotient doit être tel que, multiplié par le diviseur, il donne le dividende; donc sa valeur absolue multipliée par la valeur absolue du diviseur doit donner la valeur absolue du dividende, donc la valeur absolue du quotient doit être le quotient des valeurs absolues du dividende et du diviseur.

Si le dividende et le diviseur sont de mêmes signes, le quotient doit avoir le signe +, car, s'il avait le signe —, le diviseur multiplié par le quotient donnerait un produit avec le signe — si le diviseur était positif et avec le signe + si le diviseur était négatif, c'est-à-dire en tout cas de signe contraire au dividende; le signe + est au contraire parfaitement admissible.

On verrait d'une façon analogue que, le dividende et le diviseur étant de signes contraires, le quotient doit porter le signe —.

Le quotient de a par b se représente, comme en Arithmétique, par l'une des notations

$$a : b, \quad \frac{a}{b}.$$

Théorème I. — *Un produit ne change pas de valeur quand on intervertit l'ordre de ses facteurs.*

En effet, ainsi sa valeur absolue ne change pas, car elle est égale au produit des valeurs absolues des facteurs; quant au signe, il est en tout cas + si les facteurs négatifs sont en nombre pair et — dans le cas contraire. En effet, le signe des produits partiels successifs change chaque fois que l'on rencontre un facteur négatif.

Théorème II. — *Pour multiplier une quantité algébrique par un produit, il suffit de la multiplier successivement par chaque facteur du produit.* (Même démonstration qu'en Arithmétique.)

Corollaire. — Le produit $abcdef$ peut s'écrire à volonté

$$ab(cde)f, \quad (ab)c(def), \quad ac(bdef), \quad \ldots.$$

Théorème III. — *Lorsque l'on multiplie le dividende*

d'une division par une certaine quantité, le quotient est multiplié par cette quantité.

En effet, soient D le dividende, d le diviseur et q le quotient, on a

$$D = dq;$$

en multipliant par m les deux membres de cette égalité, on trouve

$$Dm = dqm.$$

Cette égalité montre que d multiplié par qm reproduit Dm; donc qm est le quotient de Dm par d; donc, etc.

C. Q. F. D.

Théorème IV. — *Lorsque l'on multiplie le diviseur par un certain nombre, le quotient est divisé par ce nombre.*

En effet, en conservant la même notation que tout à l'heure, l'égalité

$$D = dq$$

peut s'écrire

$$D = dm \times \frac{q}{m}.$$

En effet, $\frac{q}{m}$ est une quantité qui multipliée par m reproduit q; donc, multipliée par dm, elle reproduira dq; donc enfin D est le produit de deux facteurs dm et $\frac{q}{m}$, ce qui revient à dire que $\frac{q}{m}$ est le quotient de D divisé par dm.

Théorème V. — *Lorsque l'on multiplie le dividende et le diviseur par une même quantité, le quotient ne change pas.*

En effet, en conservant toujours les mêmes notations,

on a

$$D = dq \quad \text{et} \quad Dm = dmq,$$

ce qui démontre que q est aussi bien le quotient de D divisé par d que le quotient de Dm divisé par dm.

C. Q. F. D.

Théorème VI. — *Pour diviser un produit par l'un de ses facteurs, il suffit de supprimer ce facteur.*

En effet, le résultat ainsi obtenu est tel, que, multiplié par le facteur en question, il redevient égal au produit proposé.

Théorème VII. — *1° Quand on divise le dividende par une certaine quantité, le quotient est divisé par cette quantité; 2° quand on divise le diviseur par une certaine quantité, le quotient est multiplié par cette quantité; 3° enfin, quand on divise le dividende et le diviseur par une même quantité, le quotient ne change pas.*

Ces principes deviennent évidents si l'on observe que diviser par m une quantité, c'est la multiplier par $\frac{1}{m}$. En effet, en désignant par A une quantité quelconque, si l'on multiplie le produit $A \times \frac{1}{m}$ par m, on a

$$A \times \frac{1}{m} \times m = \frac{1}{m} \times m \times A.$$

Or $\frac{1}{m} \times m$ est évidemment égal à 1, car, par définition même, $\frac{1}{m}$ est un nombre qui multiplié par m donne 1 ; on a donc

$$A \times \frac{1}{m} \times m = A.$$

Ainsi le produit de A par $\frac{1}{m}$, multiplié par m, donne A; donc $A \times \frac{1}{m}$ est le quotient de A divisé par m.

C. Q. F. D.

Théorème VIII. — *Pour diviser une quantité par un produit, il suffit de la diviser successivement par chacun des facteurs du produit.*

En effet, proposons-nous de diviser A par $abcd$. Divisons A par a, soit q le quotient; divisons q par b, soit q' le quotient; divisons q' par c, soit q'' le nouveau quotient; enfin soit q''' le quotient de la division de q'' par d, on aura

$$A = aq, \quad q = bq', \quad q' = cq'', \quad q'' = dq'''.$$

En multipliant membre à membre ces égalités, on a

$$Aqq'q'' = abcdqq'q''q''';$$

et, en divisant par q, par q' et par q'' les deux membres de cette égalité, on a

$$A = abcdq''',$$

ce qui prouve que q''' est le quotient de la division de A par $abcd$.

EXERCICES ET NOTES.

Nous ne proposerons pas d'Exercices sur le Chapitre que l'on vient de lire; nous nous bornerons à donner ici, *sous toutes réserves,* quelques notions historiques sur les commencements de l'Algèbre.

L'histoire de la partie élémentaire des Mathématiques est très-difficile à faire, à cause de la rareté des vieux livres, de la difficulté que présente leur lecture et du temps qu'exige cette lecture; peu d'érudits se sont livrés à cette branche ardue des connaissances humaines; aussi

est-ce *sous toutes réserves* que nous allons donner les documents suivants, en nous appuyant de l'autorité d'un homme très-érudit et considéré comme compétent.

D'après Olry Terquem (*Bulletin des Sciences mathématiques*) :

La première apparition des signes + et — a lieu dans un Ouvrage intitulé : *Die cosz Christorfs Rudolfs, mit schönen Exempeln der cosz durch Michael Stieffel, gebessert und sehr gemehrt* 1571. — Le signe $\sqrt{\ }$ est employé dans cet Ouvrage.

Les signes +, — sont dus à Rudolf (1524).

Le signe = est dû à Robert Recorde (1557) (Descartes se servait du signe ∞ et Rudolph du point).

Les lettres pour représenter les nombres ont été imaginées par Viète (1540 à 1603), mais Viète n'employait que les majuscules; les minuscules sont de Thomas Harriot. Harriot a aussi imaginé les signes $>$, $<$.

Les parenthèses et les crochets sont dus à Albert Girard.

Le point comme signe de multiplication est de Leibnitz, ainsi que le signe : .

La barre de fraction se trouve dans Léonard de Pise, Fibonacci; elle est probablement due aux Hindous.

Le signe $\times$ est de Oughtred (*Clavis mathematica*, 1631). Michel Stieffel n'emploie aucun signe; pour lui, ab équivaut à $a \times b$ (1544).

La règle des signes est indiquée dans Diophante, qui emploie quelquefois le Ψ renversé comme signe d'addition.

CHAPITRE II.

DES POLYNOMES.

I. — PRÉLIMINAIRES.

On appelle *monôme* ou *terme* une quantité prise isolément, ou un ensemble de quantités qui, dans une formule, ne sont liées entre elles par aucun des signes + ou —; ainsi $2\frac{ab}{c}$ est un monôme.

On appelle *polynôme* une quantité composée de plusieurs termes séparés par les signes + ou —; ainsi $ab - c + de$ est un polynôme. Les polynômes se divisent en *binômes, trinômes,* ..., selon qu'ils ont deux, trois, ... termes.

On a déjà défini en Arithmétique ce que l'on appelait puissance d'un nombre; en Algèbre on appelle, comme en Arithmétique, *puissance* $n^{\text{ième}}$ d'une quantité le produit de n quantités égales à celle-ci; la deuxième puissance d'une quantité s'appelle aussi *carré* de cette quantité, la troisième *cube*.

Pour indiquer d'une manière abrégée la puissance $n^{\text{ième}}$ de la quantité a, on écrit le nombre n au-dessus de a, ainsi : a^n; le nombre n ainsi placé porte le nom d'*exposant* (*). On convient en outre de regarder a^0 comme égal à 1, en sorte que la puissance 0 d'une quantité quelconque

(*) Les exposants ont été imaginés par Étienne de la Roche en 1520.

est égale à 1. Cette convention peut paraître inutile, mais on verra plus loin qu'elle permet souvent de simplifier le langage; elle est d'ailleurs logique, a^0 indiquant que a a été pris zéro fois comme facteur, c'est-à-dire n'entre pas comme facteur dans le produit où il est écrit; a^0 doit donc être considéré comme équivalant à *un*.

On appelle *coefficient* d'une quantité dans un terme l'ensemble des facteurs de ce terme qui n'entrent pas dans la quantité en question; ainsi, dans le terme $3ab$, $3a$ est le coefficient de b, 3 est le coefficient de ab. Dans $2\frac{b}{a}$, 2 est le coefficient de $\frac{b}{a}$, $\frac{2}{a}$ est le coefficient de b, ...

On appelle *termes semblables* ceux qui ne diffèrent que par leurs coefficients. On voit par là que la similitude de deux termes est une chose tout à fait relative et dépend des quantités que l'on considère comme coefficients; ainsi $2ab$ et $3ab$ sont termes semblables si l'on considère 2 et 3 comme coefficients. $2a^2b$ et $4ab$ ne sont plus semblables si l'on ne considère comme coefficients que les facteurs numériques; mais ils le sont encore si l'on considère $2a^2$ comme coefficient du premier terme et 4 comme coefficient du second.

Nous verrons plus loin que la considération des termes semblables permet de simplifier considérablement le calcul algébrique.

II. — ADDITION ET SOUSTRACTION DES POLYNOMES.

Proposons-nous d'additionner les deux polynômes

$$P = a + b - c + d$$

et

$$Q = g - h + k - i;$$

le résultat cherché est

$$a + b - c + d + Q.$$

Mais, pour ajouter la somme Q à $a + b - c + d$, il suffit d'ajouter à cette quantité successivement chacune des parties de Q (p. 8); on a donc

$$P + Q = a + b - c + d + g - h + k - i.$$

C. Q. F. D.

D'où l'on voit que, *pour ajouter ensemble deux polynômes, il suffit de les écrire l'un à la suite de l'autre sans changer les signes de leurs termes.*

Cette règle s'applique évidemment à plus de deux polynômes.

Proposons-nous maintenant de retrancher le polynôme Q du polynôme P.

Retrancher Q de P revient à ajouter à P le polynôme Q changé de signe; la question est donc ramenée à celle-ci : *changer le signe du polynôme* Q. Pour y parvenir, je dis qu'il suffit de changer les signes de chacun de ses termes. En effet, pour trouver la valeur d'un polynôme, il faut ajouter les termes de même signe, retrancher la plus petite des sommes ainsi obtenues de la plus grande, et donner au résultat le signe de la plus grande. Si l'on change alors les signes des termes du polynôme, les sommes qu'il faut retrancher l'une de l'autre pour obtenir la valeur du polynôme changent de signe; la plus grande de ces deux sommes en particulier change de signe, et par suite le polynôme lui-même, qui est de même signe que cette dernière somme.

Ceci posé, on voit que, *pour retrancher* Q *de* P, *il suffira d'ajouter à* P *le polynôme* Q, *dans lequel on aura eu soin de changer les signes de tous les termes;* ou, ce qui revient au même :

Pour retrancher un polynôme d'un autre, il suffit

d'écrire à la suite de celui-ci chacun des termes du polynôme à soustraire changé de signe.

Il est inutile d'ajouter que ces règles bien simples s'appliquent encore au cas où l'un des polynômes considérés se réduirait à un monôme.

III. — MULTIPLICATION DES POLYNOMES.

Proposons-nous d'abord de multiplier un polynôme

$$P = a - b + c - d$$

par un monôme m.

1° Supposons d'abord P et m positifs, a, b, c, d et m commensurables; m sera une fraction que nous pouvons supposer égale à $\frac{3}{4}$; alors la question est ramenée à prendre les $\frac{3}{4}$ de P. Or, si l'on ajoute quatre polynômes égaux au suivant

$$Q = \frac{a}{4} - \frac{b}{4} + \frac{c}{4} - \frac{d}{4},$$

on retrouve P, en vertu des règles de l'addition des polynômes; donc le polynôme Q est égal à $\frac{P}{4}$. Ajoutons maintenant trois polynômes égaux à Q, le résultat sera égal à trois fois $\frac{P}{4}$, et l'on aura, en vertu des règles de l'addition,

$$\frac{3P}{4} = \frac{3a}{4} - \frac{3b}{4} + \frac{3c}{4} - \frac{3d}{4},$$

ou bien

$$mP = ma - mb + mc - md;$$

d'où l'on voit que, pour multiplier P par m, il suffit de multiplier par m chacun de ses termes.

2° Supposons actuellement que, P et m restant toujours positifs, a, b, c, d, m puissent prendre des valeurs incommensurables. Désignons par a', b', c', d', m' les nombres commensurables supérieurs à a, b, c, d, m ayant ces nombres pour limites, et par a'', b'', c'', d'', m'' les nombres commensurables inférieurs à a, b, c, d, m ayant ces quantités pour limites. (Si quelqu'un des nombres a, b, c, d, m était commensurable, a par exemple, il faudrait remplacer dans la démonstration a' et a'' par a.) On a évidemment

$$m'(a' - b'' + c' - d'') > m\mathrm{P} > m''(a'' - b' + c'' - d'),$$

ou, en vertu de la règle trouvée tout à l'heure,

$$\begin{gathered} m'a' - m'b'' + m'c' - m'd'' \\ > m\mathrm{P} > m'a'' - m''b' + m''c'' - m''d', \end{gathered}$$

et, *a fortiori*,

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} & m'a' - m''b'' + m'c' - m''d'' \\ & \quad > m\mathrm{P} > m''a'' - m'b' + m''c'' - m'd'. \end{aligned} \right.$$

Or les membres extrêmes de cette inégalité diffèrent tous deux de $ma - mb + mc - md$ d'aussi peu que l'on veut. En effet, posons

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathrm{A} &= m'a' - m''b'' + m'c' - m''d'', \\ \mathrm{B} &= m''a'' - m'b' + m''c'' - m'd', \\ \mathrm{C} &= ma - mb + mc - md, \end{aligned} \right.$$

on aura

$$\begin{aligned} \mathrm{A} - \mathrm{C} = (m'a' - ma) &+ (mb - m''b'') \\ &+ (m'c' - mc) + (m''d'' - md). \end{aligned}$$

Mais $m'a'$ a pour limite ma, $m''b''$ a pour limite mb, etc.; donc les différences entre parenthèses peuvent être rendues aussi petites que l'on veut, et la différence A — C par suite aussi. On verrait de même que C — B peut être pris

moindre que toute quantité donnée; mais, en vertu de la formule (1), mP reste compris entre A et B, qui diffèrent de C d'aussi peu que l'on veut; donc, *a fortiori*, les quantités fixes mP et C diffèrent l'une de l'autre d'aussi peu que l'on veut. Elles sont donc rigoureusement égales, et l'on a

$$mP = C,$$

ou bien, d'après la formule (2),

$$mP = ma - mb + mc - md.$$

3° Supposons maintenant P négatif et m positif; si nous changeons le signe de P, nous changerons évidemment le signe du produit sans changer sa valeur absolue. Or on change le signe de P en changeant les signes de chacun de ses termes, et l'on a

$$-P = -a + b - c + d;$$

$-P$ étant positif, on aura, d'après ce qui vient d'être démontré,

$$m(-P) \quad \text{ou} \quad -mP = -ma + mb - mc + md;$$

et, par conséquent, nous trouvons, comme dans le cas où P est positif, en changeant les signes des deux membres,

$$mP = ma - mb + mc - md.$$

Il resterait à examiner le cas où P serait positif et m négatif, et celui où m et P seraient négatifs tous deux; le lecteur complétera facilement lui-même la démonstration que nous venons de commencer.

En résumé, *pour multiplier un polynôme par un monôme, il suffit de multiplier chaque terme du polynôme par le monôme, en considérant chaque terme du polynôme comme affecté du signe qui le précède, et en ayant soin d'appliquer la règle des signes.*

Proposons-nous maintenant de faire le produit des deux polynômes

$$P = a - b - c + d,$$
$$Q = m + n - p,$$

le résultat cherché sera

$$aQ - bQ - cQ + dQ;$$

ou, en remplaçant aQ, bQ, cQ, ... par leurs valeurs obtenues en appliquant la règle donnée précédemment,

$$am + an - ap - (bm + bn - bp)$$
$$- (cm + cn - cp) + (dm + dn - dp).$$

Lorsque l'on aura effectué les additions et soustractions indiquées, on voit que le produit se composera : 1° du produit de chacun des termes de Q par le premier terme de P; 2° du produit changé de signe de chacun des termes de Q par le second terme de P, abstraction faite de son signe, ou, ce qui revient au même, du produit de chacun des termes de Q par le second terme de P, en tenant compte de la règle des signes; 3° etc.

Ainsi donc, *pour multiplier entre eux deux polynômes, il suffit de multiplier chaque terme du multiplicande par chaque terme du multiplicateur, en tenant compte de la règle des signes, et d'ajouter les résultats ainsi obtenus.*

Considérons maintenant plusieurs polynômes P, Q, R, S, ...; si nous voulons en faire le produit, il faudra d'abord multiplier P par Q, le résultat par R, et ainsi de suite. Or PQ est la somme algébrique des termes obtenus en prenant un terme dans P et dans Q de toutes les manières possibles, et en faisant leur produit; PQR sera la somme des termes obtenus en multipliant de toutes les manières possibles un terme de PQ par un terme de R, ou, ce qui revient au même, PQR sera la somme des produits

obtenus en prenant pour facteurs un terme dans chacun des polynômes PQR de toutes les manières possibles. En continuant ce raisonnement sur un plus grand nombre de polynômes, on arrive à cette conclusion, qui nous sera très-utile :

Le produit de plusieurs polynômes est la somme des produits obtenus en prenant de toutes les manières possibles pour facteurs un terme de chacun des polynômes en question.

IV. — SUR QUELQUES SIMPLIFICATIONS QUI SE PRÉSENTENT DANS LE CALCUL ALGÉBRIQUE.

Il peut arriver, en faisant une addition, une soustraction ou une multiplication, que certains termes du résultat soient semblables ; dans ce cas, le résultat se simplifie. En effet, considérons des termes tels que

$$2a^3 b, \quad -3a^3 b, \quad +5a^3 b;$$

si ces termes entrent dans un même polynôme, on peut les écrire l'un à côté de l'autre, et l'on aura évidemment

$$2a^3 b - 3a^3 b + 5a^3 b = (2 - 3 + 5)\, a^3 b.$$

Car, en vertu de la règle donnée pour la multiplication des polynômes, le second membre de l'égalité précédente est égal au premier ; en sorte que les trois termes considérés se réduisent simplement à $4a^3 b$. On conclut de là que :

Règle. — *Pour réduire des termes semblables en un seul, il suffit d'ajouter leurs coefficients en tenant compte des signes, le terme réduit demeurant semblable à ceux dont il dérive.*

Lorsque l'on multiplie entre eux deux monômes, il peut

arriver que ces monômes renferment une même lettre ; dans ce cas, le résultat se simplifie. En effet, considérons le produit

$$2a^4bc^2 \times 4a^2b^3c^3d;$$

si l'on observe que, pour multiplier une quantité par un produit, il suffit de la multiplier successivement par chacun des facteurs de ce produit, le résultat cherché devient

$$2a^4 \times b \times c^2 \times 4 \times a^2 \times b^3 \times c^3 \times d,$$

ou, en intervertissant l'ordre des facteurs,

$$2 \times 4 \times a^4a^2bb^3c^2c^3d.$$

Mais ce produit ne changera pas si l'on remplace quelques facteurs par leur produit ; si l'on remplace, par exemple, les coefficients 2 et 4 par leur produit 8 ; si l'on remplace enfin les facteurs, tels que a^4, a^2, par leur produit a^{4+2} ou a^6, qui indique que la lettre a a été prise quatre fois plus deux fois comme facteur ; en sorte que le résultat final sera

$$8a^6b^4c^5d.$$

De là on déduit cette règle, appelée *règle de la multiplication des monômes :*

Règle. — *Lorsque deux monômes renferment certaines lettres en commun, pour les multiplier entre eux il suffit de faire le produit de leurs coefficients et d'écrire à la suite de ce produit les lettres communes affectées chacune d'un exposant égal à la somme des exposants dont cette lettre est affectée dans les deux facteurs, et les lettres non communes.*

Il va sans dire qu'une lettre qui n'a pas d'exposant est censée porter l'exposant 1, car l'exposant est le nombre qui indique combien de fois cette lettre est prise comme

facteur. On pourrait même ajouter qu'une lettre portant l'exposant zéro est égale à 1, car l'exposant zéro indique que cette lettre n'entre pas comme facteur; en sorte qu'écrire a^0 à la suite d'un produit, c'est n'y ajouter aucun facteur ou le facteur 1, ainsi qu'on l'a fait observer (p. 17).

En s'appuyant sur les règles que nous venons de démontrer, on arrive facilement aux formules suivantes :

$$(a+b)(a+b) = a^2 + 2ab + b^2,$$

ou

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2,$$
$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2.$$

L'usage des parenthèses et des exposants placés en haut de ces parenthèses a déjà été enseigné en Arithmétique; il est donc inutile de l'expliquer ici. Les formules que nous venons d'écrire correspondent à des théorèmes qu'il faut se rappeler, et qui sont d'un usage continuel en analyse :

Le carré de la somme ou de la différence de deux quantités est égal à la somme des carrés de ces quantités, plus ou moins leur double produit.

Le produit d'une somme par une différence de deux termes est égal à la différence des carrés de ces termes.

Voici encore quelques formules à retenir :

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$
$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3,$$
$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b^2 + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4,$$

et que l'on vérifiera sans peine.

V. — DIVISION ET FRACTIONS ALGÉBRIQUES.

La plupart du temps, en Algèbre, la division ne peut que s'indiquer; ainsi il n'existe pas toujours un polynôme

quotient de deux autres dans lesquels les lettres conservent des valeurs indéterminées. Nous verrons plus loin à quels symptômes on reconnaît l'existence d'un polynôme quotient.

Quoi qu'il en soit, une division n'étant qu'indiquée, on pourra simplifier les écritures en supprimant des facteurs communs au dividende et au diviseur lorsqu'il y en aura (p. 14).

On appelle *fraction algébrique* le quotient non effectué de deux quantités algébriques; le dividende porte alors le nom de *numérateur*, le diviseur le nom de *dénominateur* de la fraction.

Théorème I. — *Étant données plusieurs fractions, on peut toujours les réduire au même dénominateur, c'est-à-dire trouver des fractions égales aux fractions données et ayant toutes le même dénominateur.*

En effet, il suffit pour cela de multiplier les deux termes de chaque fraction par le produit des dénominateurs des autres. Quelquefois l'opération est moins compliquée; ainsi les fractions $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{bd}$, $\frac{f}{dh}$ se réduisent au même dénominateur en multipliant les deux termes de la première par dh, ceux de la deuxième par h, ceux de la troisième par b.

Théorème II. — *Pour ajouter ou retrancher des fractions, il suffit de les réduire au même dénominateur et d'effectuer, comme en Arithmétique, les opérations sur les numérateurs.*

Considérons les fractions $\frac{a}{m}$, $\frac{b}{m}$, $\frac{c}{m}$, ..., ayant toutes le dénominateur m; nous avons déjà vu que $\frac{a}{m}$ était égal à $a \times \frac{1}{m}$. On le vérifie du reste aisément en remarquant

que $\frac{a}{m}$ et $a \times \frac{1}{m}$ multipliés par m donnent tous deux a; on a donc

$$\frac{a}{m} + \frac{b}{m} - \frac{c}{m} + \cdots = a \times \frac{1}{m} + b \times \frac{1}{m} - c \times \frac{1}{m} + \cdots,$$

ou bien, en considérant a, b, c, ... comme coefficients de termes semblables relativement au terme $\frac{1}{m}$,

$$\frac{a}{m} + \frac{b}{m} - \frac{c}{m} + \cdots = (a + b - c + \ldots) \times \frac{1}{m} = \frac{a + b - c + \ldots}{m}.$$

Cette égalité renferme le théorème qu'il s'agissait de démontrer.

Théorème III. — *Le produit de deux fractions est une fraction qui a pour numérateur le produit des numérateurs et pour dénominateur le produit des dénominateurs des fractions proposées.*

En effet, soit à multiplier $\frac{a}{b}$ par $\frac{c}{d}$; une fraction ou quotient, comme on a vu (p. 13), est multiplié par un nombre quand on multiplie le dividende par ce nombre, de sorte que l'on a

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times \frac{c}{d}}{b},$$

et, pour la même raison,

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{\left(\frac{ac}{d}\right)}{b};$$

mais, pour diviser la fraction $\frac{ac}{d}$ par b, il suffit de multi-

plier par b son dénominateur; de sorte qu'on a finalement (p. 13)

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Corollaire. — S'il s'agissait de plusieurs facteurs, on aurait

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}\times\frac{e}{f}\times\frac{g}{h}=\frac{ac}{bd}\times\frac{e}{f}\times\frac{g}{h}=\frac{ace}{bdf}\times\frac{g}{h}=\frac{aceg}{bdfh},$$

ce qui généralise le théorème..

THÉORÈME IV. — *Le quotient de deux fractions s'obtient en multipliant la fraction dividende par la fraction diviseur renversée.*

En effet, soit à diviser $\frac{a}{b}$ par $\frac{c}{d}$, le quotient est évidemment

$$\frac{ad}{bc};$$

car, si l'on multiplie cette fraction par $\frac{c}{d}$, on a

$$\frac{adc}{bcd},$$

qui se réduit à $\frac{a}{b}$, en divisant ses deux termes par c et par d.

C. Q. F. D.

On donne quelquefois aux fractions le nom de *rapports* et à l'égalité de fractions le nom de *proportion;* les numérateurs portent alors le nom d'*antécédents;* les dénominateurs sont les *conséquents* de la proportion; enfin le premier numérateur et le dernier dénominateur portent le nom d'*extrêmes,* les deux autres termes portent le nom de *moyens.*

On appelle *quatrième proportionnelle* à trois quan-

tités a, b, c une quantité d qui fasse avec celles-ci la proportion

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}.$$

On appelle *moyenne proportionnelle* entre deux quantités a et b (ou encore *moyenne géométrique*) une quantité c telle, que l'on ait

$$\frac{a}{c}=\frac{c}{b};$$

en multipliant par b et par c les deux membres de cette égalité, on trouve

$$ab=c^2.$$

On a généralisé la définition précédente et l'on a appelé *moyenne géométrique* entre a, b, c, d, ... une quantité x telle, que

$$x^n=abcd\ldots,$$

n étant le nombre des facteurs a, b, c, ..., et l'on a réservé le nom de *moyenne arithmétique* à la quantité définie par l'égalité

$$nx=a+b+c+\ldots.$$

Lorsque l'on a

$$\frac{a}{c}=\frac{c}{b},$$

on dit quelquefois que b est une *troisième proportionnelle* à a et c.

Théorème I. — *Dans toute proportion, le produit des extrêmes est égal au produit des moyens; en d'autres termes, de l'égalité*

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

on tire

$$ad = bc.$$

Pour cela, il suffit de multiplier par b et d les deux membres de l'égalité donnée.

THÉORÈME II. — *L'égalité*

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

entraîne les suivantes :

$$\frac{b}{a} = \frac{d}{c}, \quad \frac{a}{c} = \frac{b}{d}, \quad \frac{d}{b} = \frac{c}{a}.$$

En effet, la première se déduit de la proposée en divisant l'unité par les deux membres de la proposée; la seconde s'obtient en multipliant les deux membres de la proposée par b et en les divisant par c; enfin, la dernière s'obtient en multipliant les deux termes de la proposée par d et en les divisant par a.

Ces résultats peuvent s'énoncer ainsi : *Dans toute proportion,* 1° *on peut remplacer les antécédents par les conséquents, et* vice versâ ; 2° *on peut alterner les moyens ;* 3° *on peut alterner les extrêmes.*

THÉORÈME III. — *Les égalités*

$$(1) \qquad \frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} = \frac{a''}{b''} = \dots$$

entraînent la suivante :

$$\frac{a}{b} = \frac{ap + a'p' + a''p'' \dots}{bp + b'p' + b''p'' \dots},$$

$p, p', p'', \dots$ *désignant des quantités quelconques.*

En effet, les égalités (1) peuvent s'écrire

$$\frac{ap}{bp}=\frac{a'p'}{b'p'}=\frac{a''p''}{b''p''}=\ldots;$$

en désignant par q la valeur commune de toutes ces fractions égales, on a

$$ap=bp\times q,\quad a'p'=b'p'\times q,\quad a''p''=b''p''\times q,\quad \ldots;$$

d'où l'on déduit, en ajoutant membre à membre ces égalités,

$$ap+a'p'+a''p''+\ldots=(bp+b'p'+b''p''+\ldots)q,$$

et, en divisant par $bp+b'p'+\ldots$ les deux membres de cette dernière formule,

$$q,\ \text{c'est-à-dire}\ \frac{a}{b}=\frac{ap+a'p'+a''p''+\ldots}{bp+b'p'+b''p''+\ldots}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Corollaire. — De l'égalité

$$\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}$$

on déduit en particulier

$$\frac{a}{b}=\frac{a\pm a'}{b\pm b'}\quad \text{ou}\quad \frac{a\pm a'}{a}=\frac{b\pm b'}{b};$$

on en déduit aussi, en alternant d'abord les moyens,

$$\frac{a\pm b}{a}=\frac{a'\pm b'}{a'},\quad \text{puis}\quad \frac{a\pm b}{a\mp b}=\frac{a'\pm b'}{a'\mp b'},\quad \ldots.$$

Ces formules sont très-utiles et permettent souvent de simplifier considérablement les calculs.

NOTES ET EXERCICES.

1. Démontrer que l'on a

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac-bd)^2+(bc+ad)^2.$$

(LÉONARD DE PISE.)

2. Démontrer que l'on a

$$\begin{aligned}(a^2+b^2+c^2+d^2)(a'^2+b'^2+c'^2+d'^2) &= (aa'+bb'+cc'+dd')^2\\ &+(ab'-ba'-cd'+dc')^2\\ &+(ac'-ca'+bd'-db')^2\\ &+(ad'-da'-bc'+cb')^2.\end{aligned}$$

(EULER.)

3. On a

$$\begin{aligned}&(cb'-bc')^2+(ac'-ca')^2+(ab'-ba')^2\\ &\quad=(a^2+b^2+c^2)(a'^2+b'^2+c'^2)-(aa'+bb'+cc')^2.\end{aligned}$$

4. On a plus généralement

$$\begin{aligned}&(cb'-bc')(cb''-bc'')+(ac'-ca')(ac''-ca'')\\ &\quad+(ba'-ab')(ba''-ab'')\\ &\quad=(a^2+b^2+c^2)(a'a''+b'b''+c'c'')\\ &\quad-(aa'+bb'+cc')(aa''+bb''+cc'').\end{aligned}$$

5. On a encore

$$\begin{aligned}&(cb'-bc')^2+(ac'-ca')^2+(ba'-ab')^2\\ &\quad+(da'-ad')^2+(db'-bd')^2+(dc'-cd')^2\\ &\quad=(a^2+b^2+c^2+d^2)(a'^2+b'^2+c'^2+d'^2)\\ &\quad-(aa'+bb'+cc'+dd')^2.\end{aligned}$$

6. Les formules précédentes sont d'un usage fréquent. En voici de moins utiles :

$$\begin{aligned}&(1+a+b+a^2+ab+b^2)^2\\ &\quad=(1+a)^2(a+b)^2+(1+b)^2(a+b)^2+(1+a+b-ab)^2.\end{aligned}$$

(CATALAN.)

On a aussi

$$(1+a+b+a^2+ab+b^2)^2$$
$$=a^2(a+b+1)^2+b^2(a+b+1)^2+(a+b+1)^2+(a+b+ab)^2.$$

(NEUBERG.)

7. *Note sur les inégalités.* — On peut toujours ajouter ou retrancher aux deux membres d'une inégalité une même quantité, mais on n'a pas toujours le droit de multiplier les deux membres par une même quantité; en effet, si cette quantité est négative, il est clair que l'on renverse le sens de l'inégalité.

On peut toujours ajouter des inégalités de même sens membre à membre, mais on ne peut pas les retrancher l'une de l'autre en général. Ces préceptes sont des affaires de bon sens, et il suffit de les énoncer.

8. Prouver que $a^2+b^2 \geqq 2ab$, $a^2+b^2+c^2 \geqq ab+bc+ac$,

$$abc \geqq (b+c-a)(c+a-b)(a+b-c).$$

9. On appelle *moyenne arithmétique* des n quantités $a, b, c, \ldots, l$ la quantité

$$\frac{a+b+c+\ldots+l}{n};$$

la quantité $\sqrt[n]{a+b+c+\ldots+l}$ est leur *moyenne géométrique*, la quantité $\frac{1}{n}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\ldots+\frac{1}{l}\right)$ est leur *moyenne harmonique*.

Cela posé, montrer que la *moyenne arithmétique*, la *moyenne géométrique* et la *moyenne harmonique* de plusieurs quantités sont comprises entre la plus grande et la plus petite d'entre elles.

10. En général, on appelle *moyenne* de plusieurs quantités une quantité comprise entre la plus grande et la plus petite d'entre elles.

Ceci posé, prouver que

$$\frac{a+a'+a''+\ldots}{b+b'+b''+\ldots}$$

est une moyenne entre $\frac{a}{b}, \frac{a'}{b'}, \frac{a''}{b''}, \ldots$.

11. On a

$$\frac{a^2}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^2}{(b-a)(b-c)}+\frac{c^2}{(c-a)(c-b)}=1.$$

12. On a

$$\frac{bc}{(a-b)(a-c)}+\frac{ca}{(b-a)(b-c)}+\frac{ab}{(c-a)(c-b)}=0.$$

13. On a

$$\frac{a}{(b-c)(c-a)}+\frac{b}{(c-a)(a-b)}+\frac{c}{(a-b)(b-c)}$$
$$=\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a}.$$

14. Prouver que

$$n(x^2+y^2+z^2+\ldots+t^2)>(x+y+z+\ldots+t)^2,$$

n désignant le nombre des quantités $x, y, z, \ldots, t$. On a aussi

$$n^2(x^3+y^3+z^3+\ldots+t^3)>(x+y+z+\ldots+t)^3.$$

(Généraliser.)

15. x, y, z étant plus grands que zéro, prouver que

$$(x+y+z)^3>3(y+z)(z+x)(x+y).$$

CHAPITRE III.

DES POLYNOMES ENTIERS.

I. — DÉFINITIONS.

On appelle *polynôme entier* en x un polynôme dont les différents termes sont les produits de quantités indépendantes de x par les puissances 0, 1, 2, ... de x :

$$1 + x - 3x^2 + 7x^5$$

est un polynôme entier en x.

Un polynôme peut être entier par rapport à plusieurs lettres a, b, c, x, ... Ces lettres sont alors les *variables* du polynôme.

Un polynôme entier s'appelle aussi une *fonction entière* de ses variables.

On dit qu'un polynôme est *ordonné* par rapport aux puissances croissantes ou décroissantes d'une même lettre lorsque les exposants de cette lettre y vont en croissant ou en décroissant depuis le premier terme jusqu'au dernier.

On appelle *degré* d'un terme par rapport à des lettres déterminées la somme des exposants dont ces lettres sont affectées dans ce terme; ainsi $3a^2b$ est du troisième degré par rapport à a et b, du deuxième degré par rapport à a seul, et du premier par rapport à b seul.

On appelle *degré* d'un polynôme le degré de celui de ses termes dans lequel la somme des exposants des lettres

par rapport auxquelles on compte le degré est la plus grande.

Un polynôme est dit *homogène* par rapport à plusieurs lettres lorsque tous ses termes sont de même degré.

Il est clair que la somme et la différence de deux polynômes homogènes de même degré sont des polynômes homogènes.

Le produit de deux polynômes homogènes est encore un polynôme homogène dont le degré est égal à la somme des degrés des facteurs.

Cette remarque est d'une grande utilité dans le calcul et permet de vérifier à chaque instant les fautes que l'on peut faire en omettant des lettres ou des exposants : on a très-souvent l'occasion de calculer sur des polynômes homogènes; il faut profiter de cette circonstance toutes les fois qu'on le peut et vérifier que les formules que l'on obtient par multiplication de polynômes homogènes restent homogènes.

Un polynôme du premier degré s'appelle aussi *fonction linéaire*.

II. — MULTIPLICATION DES POLYNOMES ENTIERS.

Toutes les fois que l'on peut ordonner un polynôme, il faut le faire; la symétrie qui en résulte guide beaucoup dans les calculs, et surtout lorsqu'il s'agit de faire le produit de deux polynômes.

Considérons, par exemple, les deux polynômes ordonnés

$$P = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4,$$
$$Q = 2 - 3x + 4x^2 - 5x^3,$$

et cherchons leur produit; nous suivrons la règle générale, mais nous écrirons sur une première ligne horizon-

tale le produit du polynôme P par le premier terme 2 de Q; nous obtiendrons ainsi un premier produit partiel ordonné; multiplions ensuite le polynôme P par le second terme $-3x$ de Q, nous obtiendrons un second produit partiel ordonné; nous l'écrirons au-dessous du premier, de telle sorte que les termes de même degré se correspondent dans une même colonne verticale, et ainsi de suite : la réduction des termes semblables porte alors sur les termes inscrits dans une même colonne verticale.

On dispose le calcul ainsi qu'il suit :

$$\begin{array}{l}
1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 \\
\quad 2 - 3x + 4x^2 - 5x^3
\end{array}$$

$$\begin{array}{rr|r|r|r|r|r|r|r}
\hline
2 & +4 & x\ +6 & x^2\ +8 & x^3\ +10 & x^4 & & & \\
 & -3 & -6 & -9 & -12 & & -15 & x^5 & \\
 & & +4 & +8 & +12 & & +16 & +20 & x^6 \\
 & & & -5 & -10 & & -15 & -20 & -25\,x^7 \\
\hline
\end{array}$$

$$2 + x \quad + 4\ x^2 + 2\ x^3 \qquad - 14\ x^5 \qquad - 25x^7,$$

en évitant de répéter la partie commune aux divers termes semblables.

La disposition de calcul que nous avons adoptée est surtout avantageuse lorsque les coefficients de la lettre ordonnatrice sont eux-mêmes des polynômes.

REMARQUE. — *Lorsque le multiplicande, le multiplicateur et le produit sont ordonnés de la même manière par rapport à la même lettre, le premier et le dernier terme du produit sont égaux respectivement aux produits des premiers et des derniers termes des polynômes facteurs.*

En effet, supposons les polynômes ordonnés par rapport aux puissances décroissantes de x; les premiers termes des facteurs sont les termes de degré le plus élevé, leur produit est un terme du produit total, et il est bien

évident qu'il est de degré plus élevé que tout autre terme du produit total; par conséquent, il ne se réduira avec aucun d'eux et sera le premier terme du produit total. On verrait de même que le produit des derniers termes des facteurs est le dernier terme du produit total.

III. — PROPRIÉTÉS DES POLYNOMES ENTIERS.

Deux polynômes entiers en x sont dits *identiques* quand ils sont égaux, quelle que soit la valeur attribuée à x. Si deux polynômes contiennent plusieurs variables, ils peuvent être identiques par rapport à certaines variables et ne pas l'être relativement à d'autres; ainsi deux polynômes en x et a peuvent être égaux pour $a = 1$ et $a = 2$, quel que soit x; ils sont alors dits *identiques par rapport à x quand $a = 1$ et quand $a = 2$.*

D'après la méthode que nous avons exposée au paragraphe précédent pour faire le produit de deux polynômes, on voit que ce produit est *identiquement* égal au multiplicande multiplié par le multiplicateur, c'est-à-dire *quel que soit x.*

Dorénavant nous dirons qu'un polynôme entier en x est la somme, la différence, le produit, le quotient de deux autres quand il sera effectivement la somme, la différence, le produit ou le quotient de ces deux polynômes *identiquement,* c'est-à-dire quelle que soit la valeur attribuée à x.

Ainsi on a, quel que soit x,

$$(x+1)(x-1) = x^2 - 1;$$

alors $x^2 - 1$ est le produit de $x + 1$ par $x - 1$, $x - 1$ est le quotient de $x^2 - 1$ par $x + 1$, etc.

Mais $x^2 + 2x - 1$ n'est pas le produit de $x + 1$ par $x - 1$,

bien que pour $x = 0$, par exemple, on ait

$$(x+1)(x-1) = x^2 + 2x - 1,$$

parce que cette égalité n'a pas lieu quel que soit x : elle n'a pas lieu, en effet, pour $x = 1$.

Un polynôme A entier en x est *divisible* par un autre B quand ils ont un quotient entier en x. En d'autres termes :

Un polynôme entier A en x est divisible par un autre B quand il existe un polynôme Q tel, que l'on ait *identiquement,* c'est-à-dire quel que soit x,

$$A = BQ.$$

Théorème I. — *$x^m - a^m$ est divisible par $x - a$.*

En effet, il est facile de constater que l'on a identiquement

$$(1) \quad x^m - a^m = (x^{m-1} + ax^{m-2} + a^2x^{m-3} + a^3x^{m-4} + \ldots + a^{m-1})(x - a).$$

Pour le vérifier, il suffit d'effectuer la multiplication indiquée dans le second membre de cette formule; les produits de $x^{m-1} + ax^{m-2} + \ldots + a^{m-1}$ par x et par $-a$ sont

$$x^m + ax^{m-1} + a^2x^{m-2} + \ldots + a^{m-1}x$$

et

$$-ax^{m-1} - a^2x^{m-2} - \ldots - a^{m-1}x - a^m;$$

en les ajoutant et en observant que tous les termes se détruisent deux à deux, à l'exception des termes extrêmes, on trouve bien $x^m - a^m$.

Cette proposition, à la forme de son énoncé près, était connue d'Archimède, c'est-à-dire bien longtemps avant l'invention de l'Algèbre; elle a des applications nombreuses, et la formule (1) est à retenir.

Théorème II. — *Si un polynôme* P *entier en x en divise*

d'autres A, B, C, ..., *et si les quotients de* A, B, C,... *par* P *sont* A′, B′, C′, ..., P *divisera aussi*

$$aA + bB + cC + \dots,$$

a, b, c,... désignant des polynômes entiers en x ou des quantités indépendantes de x. Le quotient sera

$$aA' + bB' + cC' + \dots.$$

C'est ce que l'on vérifie en multipliant ce dernier polynôme par P; on obtient en effet ainsi, quel que soit x,

$$aA'P + bB'P + cC'P + \dots,$$

en observant que, A′, B′, C′, ... étant les quotients de A, B, C,... par P, on a $A'P = A$, $B'P = B$,.... Cette expression devient précisément

$$aA + bB + cC + \dots;$$

donc $aA' + bB' + \dots$ est bien le quotient de $aA + bB + \dots$ par P.

Théorème III. — *Si le polynôme* P *entier en x s'annule pour $x = a$, il est divisible par $x - a$, et, si m est le degré de* P, *on pourra toujours effectuer le quotient de* P *par $x - a$, de telle sorte que ce quotient soit de degré $m - 1$.*

En effet, soit

$$P = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots + A_m x^m,$$

A_0, A_1, ..., A_m désignant des quantités indépendantes de x. Puisque P est nul pour $x = a$, on aura

$$0 = A_0 + A_1 a + A_2 a^2 + \dots + A_m a^m;$$

retranchant cette égalité de la précédente, on a

$$P = A_1 (x - a) + A_2 (x^2 - a^2) + \dots + A_m (x^m - a^m);$$

$x-a$, x^2-a^2, ... sont divisibles par $x-a$ (théorème I), et les quotients sont 1, $x+a$, x^2+ax+a^2, ... Donc, en vertu du théorème précédent, P sera divisible par $x-a$ et le quotient *pourra* se mettre sous la forme

$$A_1 + A_2(x+a) + A_3(x^2+ax+a^2) + \ldots \\ + A_m(x^{m-1}+ax^{m-2}+\ldots+a^{m-1})$$

ou encore

$$\begin{aligned} &A_1 + A_2 a + A_3 a^2 + \ldots + A_m a^{m-1} \\ &+ (A_2 + A_3 a + A_4 a^2 + \ldots + A_m a^{m-2})x \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ A_m x^{m-1}. \end{aligned}$$

Le quotient *pourra* donc bien se mettre, quel que soit x, sous la forme d'un polynôme de degré $m-1$. C. Q. F. D.

La démonstration précédente est de Lagrange (*Traité des équations numériques*, Note II).

THÉORÈME IV. — *Un polynôme en x du degré m ne peut s'annuler pour plus de m valeurs de x, à moins d'être identiquement nul.*

En effet, soit P un polynôme en x du degré m. Si ce polynôme s'annule pour $x=a_1$, nous venons de voir qu'il était divisible par $x-a_1$, et que l'on pouvait poser

$$P = Q_1(x-a_1),$$

Q_1 désignant ici un polynôme du degré $m-1$. Si l'on suppose alors que P s'annule encore pour $x=a_2$, il en sera de même de son égal $Q_1(x-a_1)$; mais, si a_2 est différent de a_1, $x-a_1$ ne sera pas nul pour $x=a_2$, et le produit $Q_1(x-a_1)$ ne pourra s'annuler que si $Q_1=0$. Q_1, s'annulant pour $x=a_2$, sera divisible par $x-a_2$, et l'on pourra poser

$$Q_1 = Q_2(x-a_2),$$

Q_2 désignant ici un polynôme de degré $m-2$. Supposons que P s'annule encore pour $x=a_3$, on démontrera, comme tout à l'heure, que Q_1 s'annule aussi pour $x=a_3$ et, en vertu de l'égalité précédente, que Q_2 s'annule également pour $x=a_3$. On pourra donc poser

$$Q_2=Q_3(x-a_3),$$

Q_3 désignant un polynôme de degré $m-3$. En continuant ainsi, on finira par obtenir une formule telle que

$$Q_{m-1}=Q_m(x-a_m),$$

dans laquelle Q_m désigne une quantité indépendante de x, ou, comme on dit quelquefois, du *degré zéro*.

Si l'on multiplie membre à membre toutes les égalités que nous venons d'écrire, on trouve

$$PQ_1Q_2Q_3\ldots Q_{m-1}=Q_1Q_2\ldots Q_m(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_m),$$

ou bien, en supprimant le facteur $Q_1Q_2\ldots Q_{m-1}$ aux deux membres de cette égalité,

$$P=Q_m(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_m);$$

et il est bien clair que le polynôme P ne peut plus s'annuler pour aucune valeur de x différente de $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_m$, à moins que Q_m ne soit nul, auquel cas P serait constamment nul, quelle que soit la valeur attribuée à x, ce que l'on exprime en disant que P *est identiquement nul.*

Cette démonstration repose, comme on voit, sur ce que la quantité Q_m ne contient pas x, et, par conséquent, ne peut devenir nulle pour aucune valeur de x, à moins d'être toujours nulle.

THÉORÈME V. — *Un polynôme identiquement nul, ou, d'après le théorème précédent, un polynôme qui s'annule*

pour un nombre de valeurs de sa variable supérieur à son degré, a ses coefficients nuls.

En effet, soit

$$P = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_m x^m$$

le polynôme en question; ce polynôme, étant nul quel que soit x, sera nul pour $x = 0$. Or, si l'on y fait $x = 0$, ce polynôme se réduit à A_0; donc A_0 est nul. On a donc simplement

$$P = A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_m x^m.$$

Mais, P étant nul quel que soit x,

$$\frac{P}{x} = A_1 + A_2 x^2 + \ldots + A_m x^{m-1}$$

sera encore nul pour toutes les valeurs de x, excepté peut-être pour $x = 0$. Mais il est nul pour un nombre de valeurs de x supérieur à son degré, qui est $m - 1$; donc il est certainement nul pour $x = 0$. On en conclut que $A_1 = 0$, et ainsi de suite; donc enfin le polynôme P a tous ses coefficients égaux à zéro. C. Q. F. D.

Théorème V. — *Lorsque deux polynômes* P, Q *entiers en x sont égaux pour plus de m valeurs de x, m désignant le degré de celui de ces polynômes qui a le degré le plus élevé, ces polynômes sont identiquement égaux, c'est-à-dire qu'ils sont toujours égaux et que les coefficients des mêmes puissances de x sont égaux.*

En effet, soient

$$P = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_m x^m,$$
$$Q = B_0 + B_1 x + B_2 x^2 + \ldots + B_n x^n$$

les deux polynômes en question; le polynôme

$$P - Q = (A_0 - B_0) + (A_1 - B_1) x + (A_2 - B_2) x^2 + \ldots$$

est du degré m au plus. Or, P étant égal à Q pour plus de m valeurs de x, leur différence P — Q s'annule pour plus de m valeurs de x, et l'on a

$$A_0 - B_0 = 0, \quad \ldots, \quad A_n - B_n = 0, \quad A_{n+1} = 0, \quad \ldots, \quad A_m = 0,$$

ou

$$A_0 = B_0, \quad A_1 = B_1, \quad \ldots, \quad A_n = B_n, \quad A_{n+1} = 0, \quad \ldots, \quad A_m = 0,$$

ce qui revient à dire que les polynômes sont identiques et de même degré.

Remarque I. — Si les polynômes P et Q étaient égaux pour m valeurs de x et si l'on avait $A_m = B_m$, la différence P — Q serait de degré $m - 1$, et l'on aurait encore P — Q nul pour plus de $m - 1$ valeurs de x; donc

$$A_0 = B_0, \quad \ldots, \quad A_{m-1} = B_{m-1}.$$

IV. — COROLLAIRES.

Les corollaires que nous allons énoncer sont tellement importants, que nous avons voulu éveiller l'attention du lecteur en les plaçant dans un paragraphe spécial.

Corollaire I. — *L'addition, la soustraction, la multiplication et la division des polynômes (quand elle est possible) ne peuvent se faire que d'une seule manière, quand on veut le résultat sous forme de polynôme entier.*

Ainsi, par exemple, le produit de deux polynômes ne pourra pas se faire de deux manières différentes, car les résultats, devant être égaux quel que soit x, devront avoir leurs coefficients égaux.

Corollaire II. — *Deux polynômes entiers en $x, y, z, \ldots,$*

un monôme, il faut indiquer la division et supprimer tous les facteurs communs apparents; si, par exemple, une même lettre entre au dividende et au diviseur, elle doit disparaître dans celui de ces deux termes où elle entre avec le moindre exposant, et dans l'autre terme son exposant doit diminuer d'autant d'unités qu'il y en avait dans l'exposant correspondant au premier terme.

Ceci posé, proposons-nous de diviser le polynôme

$$P = x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 5x - a^5$$

par le polynôme

$$Q = x^3 - 3x^2 + 3x - 1.$$

Ces deux polynômes sont entiers en x; nous supposerons P divisible par Q, nous appellerons V le quotient, et nous supposerons ce quotient entier et ordonné comme P et Q; P sera le produit de V par Q; donc, en vertu d'une remarque faite (p. 38), le premier terme de P sera le produit du premier terme de V par le premier terme de Q, donc le premier terme de V sera le quotient du premier terme de P par le premier de Q ou $x^5 : x^3$, c'est-à-dire x^2 :

$$\begin{array}{l|l}
P = x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 5x - 1 & x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = Q, \\
\quad -x^5 + 3x^4 - 3x^3 + x^2 & \overline{x^2 - 2x + 1 \qquad = V,} \\
\hline
\qquad -2x^4 + 7x^3 - 9x^2 + 5x - 1 & \\
\qquad +2x^4 - 6x^3 + 6x^2 - 2x & \\
\hline
\qquad\qquad + x^3 - 3x^2 + 3x - 1 & \\
\qquad\qquad - x^3 + 3x^2 - 3x + 1 & \\
\hline
\qquad\qquad\qquad 0 \quad 0 \quad 0 &
\end{array}$$

Si alors du polynôme P on retranche le produit $x^2 \times Q$ (que nous avons écrit changé de signe immédiatement au-dessous du polynôme P), le reste (qui se trouve inscrit au-dessous du produit $x^2 Q$ changé de signe) ne contien-

dra plus que le produit des termes du premier degré et du terme indépendant de x dans V par le diviseur Q ; en raisonnant sur ce reste comme sur le polynôme P, on est conduit à diviser son premier terme par x^3, et ainsi de suite. On déduit de là cette règle :

RÈGLE. — *Pour diviser deux polynômes entiers et ordonnés de la même manière l'un par l'autre : 1° diviser le premier terme du dividende par le premier terme du diviseur ; le quotient ainsi trouvé est le premier terme du quotient total ; 2° du dividende total retrancher le produit du diviseur par le premier terme du quotient ; on obtient ainsi un premier reste sur lequel on opère comme sur le dividende total ; on obtient alors le deuxième terme du quotient, et ainsi de suite.*

On abrége quelquefois les calculs. D'abord on peut remarquer qu'il est inutile d'écrire complétement les restes partiels ; on peut se contenter d'abaisser le seul terme dont on va avoir besoin ; enfin on peut éviter aussi d'écrire les produits du diviseur par chaque terme du quotient, et faire les soustractions de tête ainsi qu'il suit.

Je reprends l'exemple précédent ; j'ai trouvé x^2 pour premier terme du quotient, je multiplie alors le diviseur par x^2, et je m'exprime ainsi : $+x^2$ par $+x^3$ donne $+x^5$, et, pour retrancher, $-x^5$; ce terme détruit le terme x^5 du dividende ; $+x^2$ par $-3x^2$ donne $-3x^4$, et, pour retrancher, $+3x^4$; ce terme se réduit avec le terme $-5x^4$ du dividende et donne $-2x^4$, et ainsi de suite.

Nous avons supposé que le quotient était un polynôme entier en x ; s'il n'en était pas ainsi, en suivant le procédé que nous venons d'indiquer, l'opération ne se terminerait pas ; c'est-à-dire qu'en retranchant du dernier reste le produit du diviseur par le terme du quotient indépendant de x, au lieu de trouver zéro, on trouverait un polynôme

de degré inférieur au diviseur. En désignant par R ce polynôme, on aurait évidemment

$$P = VQ + R,$$

car P se compose identiquement de la somme des produits de chacun des termes de V par Q, augmentée de R.

De là on conclut évidemment que, si le polynôme P n'est pas divisible par Q, la suite des calculs le montrera, puisque l'on devra être conduit à l'opération qui consisterait à diviser un terme du polynôme R par un terme de degré plus élevé que lui : le polynôme R auquel on est ainsi ramené porte le nom de *reste de la division de* P *par* Q.

Cette remarque nous permet de généraliser la définition de la division des polynômes, et nous dirons que :

Diviser un polynôme P *par un polynôme* Q, *c'est décomposer le polynôme dividende* P *en deux parties, dont l'une* VQ *soit le produit du diviseur* Q *par un polynôme* V *appelé quotient, et dont l'autre partie soit un polynôme* R *de degré inférieur au diviseur.*

Il est facile de démontrer que la division ne peut se faire que d'une seule manière, et qu'il n'est pas possible de trouver pour V et R des valeurs différentes de celles que l'on a trouvées par la méthode précédente. Supposons, en effet, que l'on puisse trouver par des procédés différents, R et R' étant de degrés inférieurs à Q,

$$P = VQ + R \quad \text{et} \quad P = V'Q + R';$$

on en conclurait

$$VQ + R = V'Q + R'$$

ou

$$(V - V')Q = R' - R,$$

identité impossible, puisque $(V - V')Q$ est au moins de même degré que Q, tandis que $R' - R$ est de degré inférieur à Q, à moins que l'on n'ait $V - V' = 0$, et par suite $R = R'$.

Théorème. — *Le reste de la division d'un polynôme par $x - a$ est égal au résultat obtenu en remplaçant dans ce polynôme x par a.*

En effet, soit P un polynôme entier en x, divisons-le par $x - a$, soit Q le quotient, R le reste; on aura

$$P = Q(x - a) + R.$$

Cette formule ayant lieu quel que soit x, on peut y faire $x = a$; on a alors, en observant que $x - a$ est nul,

$$P = R.$$

Or, le reste R est de degré inférieur à $x - a$; il ne contient donc pas x, et, par suite, il est égal à P quand $x = a$; en d'autres termes, R est égal à la valeur que prend P pour $x = a$. C. Q. F. D.

Corollaire I. — Le reste de la division de $x^m - a^m$ par $x - a$ est $a^m - a^m$ ou zéro; $x^m - a^m$ est donc divisible par $x - a$, ce que l'on savait.

Corollaire II. — $x^m + a^m$ est divisible par $x + a$ quand m est impair, ce dont on s'assure en changeant a en $-a$.

Corollaire III. — $x^m - a^m$ est divisible par $x + a$ quand m est pair.

Corollaire IV. — Le reste de la division d'un polynôme par $x^2 + 1$ s'obtient en remplaçant x^2 par -1 dans ce polynôme, etc.

VI. — REMARQUES RELATIVES A LA THÉORIE DE LA DIVISION.

Première remarque. — Nous avons montré comment on pouvait trouver le quotient de deux polynômes, en l'ordonnant suivant les puissances décroissantes de la variable; mais il est clair qu'on aurait pu l'ordonner par rapport aux puissances croissantes. Ainsi, le terme de degré le moins élevé du quotient est égal au quotient du terme de degré le moins élevé du dividende par le terme du degré le moins élevé du diviseur, car le produit du diviseur par le quotient doit donner le dividende, et, d'après le théorème énoncé p. 38, le produit des termes du degré le moins élevé dans le quotient et le diviseur doit donner le terme de degré le moins élevé dans le dividende.

Supposons le premier terme du quotient trouvé. Si du dividende on retranche le produit du premier terme du quotient par le diviseur, le reste ne contiendra plus que le produit des autres termes du quotient par le diviseur; on trouvera alors le second terme du quotient comme on a trouvé le premier, en considérant le reste comme un nouveau dividende, et ainsi de suite.

Pour donner un exemple de cette manière de procéder, divisons $1 - x - 2x^2$ par $1 + x$:

$$\begin{array}{rrr|l} 1 & -\ x & -\ 2x^2 & 1 + x \\ \cline{4-4} & -\ 2x & -\ 2x^2 & 1 - 2x. \\ & 0 & 0 & \end{array}$$

Nous raisonnerons comme il suit : 1 divisé par 1 donne 1 au quotient; en multipliant le diviseur $1 + x$ par 1 et en le retranchant du dividende, on trouve $-2x - 2x^2$ qui, divisé par $1 + x$, donne le second terme du quotient $-2x$. Le quotient est donc $1 - 2x$.

Deuxième remarque. — Je suppose que l'on donne deux

polynômes U et V entiers en x, que nous appellerons *dividende* et *diviseur,* ordonnés par rapport aux puissances décroissantes de x; divisons le premier terme du dividende par le premier terme du diviseur; soit a le premier terme du quotient, qui pourra être de la forme $\frac{K}{x^\mu}$ ou Kx^μ, suivant que le degré m de U sera plus petit ou plus grand que le degré n de V; de U retranchons le produit aV, nous aurons un reste U′; divisons le premier terme de U′ par le premier terme de V; soit b le quotient; de U′ retranchons bV, soit U″ le reste, et ainsi de suite; nous aurons identiquement

$$U = aV + U', \quad U' = bV + U'', \quad \ldots, \quad U^{\nu-1} = lV + U^{(\nu)},$$

et par suite

$$(1) \qquad U = (a + b + \ldots + l)V + U^{(\nu)}.$$

Maintenant, si l'on considère un polynôme contenant, outre des termes de la forme Kx^μ, où K est indépendant de x, des termes de la forme $\frac{K}{x^\mu}$, on pourra dire qu'un polynôme est de degré $-m$ s'il ne contient que des termes de la forme $\frac{K}{x^\mu}$ et si la moins forte puissance de $\frac{1}{x}$ est m.

Ceci posé, a est de degré $m-n$, b est de degré $m-n-1$, c de degré $m-n-2, \ldots$; U′ est de degré $n-1$ au plus, U″ de degré $n-2$ au plus, ... Donc la formule (1) montre que, étant donnés deux polynômes U et V de degrés m et n, *il est toujours possible de décomposer* U *en deux parties dont l'une soit le produit de* V *par un certain polynôme* Q *de degré* $m-n$ *ayant* ν *termes de la forme* Kx^μ *ou* $\frac{K}{x^\mu}$, *et dont l'autre soit un polynôme de degré* $n-\nu$ *au plus.*

Troisième remarque. — Si l'on ordonne les polynômes U et V suivant les puissances croissantes de x, on pourra de U retrancher le produit de V par le quotient α du premier terme de U par le premier terme de V, ..., comme si l'on voulait diviser U par V, et continuer ainsi l'opération indéfiniment. On voit que l'on aura ainsi

$$U = QV + U_\nu.$$

Si, pour fixer les idées, nous supposons le premier terme de U de degré p, le premier terme de V de degré q, U_ν sera composé de $\nu - 1$ termes et son premier terme sera de degré $p - q + \nu$ au moins.

Exemples. — En divisant 1 par $1 - x$, on trouve

$$1 = (1 - x)(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n) + x^{n+1}$$

si l'on ordonne le diviseur par rapport aux puissances croissantes de x. Dans le cas contraire, on a

$$1 = (x - 1)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \ldots + \frac{1}{x^n}\right) + \frac{1}{x^n}.$$

On conclut de ces deux formules

$$\frac{1}{1 - x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \frac{x^{n+1}}{1 - x}$$
$$= -\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} - \ldots - \frac{1}{x^n} - \frac{1}{x^n(1 - x)}.$$

Ces formules sont souvent utiles.

VII. — MÉTHODE DES COEFFICIENTS INDÉTERMINÉS.

Dans un grand nombre de questions d'Algèbre, on a à chercher un polynôme de forme donnée, mais dans lequel certains coefficients sont inconnus; la connaissance des

propriétés du polynôme en question peuvent alors servir à déterminer ces coefficients. La méthode qui a pour but de trouver ainsi les coefficients d'un polynôme dont les propriétés sont connues porte le nom de *méthode des coefficients indéterminés* (il serait mieux de dire *à déterminer*). Cette méthode est une des plus fécondes que l'on connaisse; elle est d'ailleurs susceptible d'une grande extension; nous la devons à Descartes.

Pour faire connaître l'esprit de la méthode, nous l'appliquerons ici à un seul exemple, parce que nous aurons souvent l'occasion de l'employer dans la suite de cet Ouvrage. Proposons-nous de diviser $x^4 - 8x^2 + 7x - 1$ par $x^2 - 3x + 1$. Le quotient est un polynôme inconnu du second degré, le reste est du premier degré. On peut donc représenter le quotient par $ax^2 + bx + c$ et le reste par $px + q$; a, b, c, p, q sont alors des coefficients à déterminer ou *indéterminés*. Mais on sait que le dividende d'une division est égal au produit du diviseur par le quotient augmenté du reste; donc on doit avoir

$$x^4 - 8x^2 + 7x - 1 = (ax^2 + bx + c)(x^2 - 3x + 1) + px + q$$

identiquement; le second membre effectué donne

$$ax^4 + (b - 3a)x^3 + (a - 3b + c)x^2 + (b - 3c + p)x + c + q.$$

Comme il doit être identique au premier, les coefficients des mêmes puissances de x doivent être égaux; on doit donc avoir

$$1 = a,\ 0 = b - 3a,\ -8 = a - 3b + c,\ 7 = b - 3c + p,\ -1 = c + q.$$

De la première de ces formules on tire

$$a = 1,$$

de la deuxième

$$0 = b - 3 \quad \text{ou} \quad b = 3,$$

de la troisième

$$-8 = 1 - 9 + c \quad \text{ou} \quad c = 0,$$

de la quatrième

$$7 = 3 + p \quad \text{ou} \quad p = 4,$$

de la cinquième

$$-1 = q \quad \text{ou} \quad q = -1.$$

Le quotient cherché est donc

$$x^2 + 3x,$$

et le reste

$$4x - 1,$$

et il est clair que l'on pourrait employer la même méthode pour faire une division quelconque.

EXERCICES ET NOTES.

1. $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ est divisible par $a + b + c$; former le quotient.

2. $a^m + b^m + c^m - (a + b + c)^m$ est divisible par

$$(a + b)(b + c)(a + c);$$

former le quotient.

3. A quelle condition $x^m - 1$ est-il divisible par $x^n - 1$ (m doit être multiple de n)?

4. Tout polynôme entier en x et y qui change de signe sans changer de valeur absolue quand on change x en y et y en x est divisible par $x - y$.

5. Un polynôme entier en x et y qui ne change pas de valeur quand on change x en y et y en x et qui est divisible par $x - y$ l'est aussi par $x + y$.

6. Prouver que $x^m \sin\varphi - r^{m-1}x \sin m\varphi + r^m \sin(m-1)\varphi$ est divisible par $x^2 - 2rx\cos\varphi + r^2$. (En partant de là, Gauss prouve que tout polynôme est décomposable en facteurs simples du premier et du second degré.)

Voici quelques exercices sur la méthode des coefficients indéterminés.

7. Démontrer la formule

$$\begin{aligned}&(1+ax)(1+a^2x)(1+a^3x)\ldots(1+a^nx)\\&=1+\frac{a^n-1}{a-1}ax+\frac{(a^{n-1}-1)(a^n-1)}{(a^2-1)(a-1)}a^{1+2}x^2+\ldots\\&+\frac{(a^{n-i}-1)\ldots(a^{n-2}-1)(a^{n-1}-1)(a^n-1)}{(a^{i+1}-1)\ldots(a^3-1)(a^2-1)(a-1)}a^{1+2+\cdots+(i+1)}x^{i+1}+\ldots\\&+a^{1+2+3+\cdots+n}x^n.\end{aligned}$$

Pour faire la démonstration, on posera

$$(1+ax)(1+a^2x)\ldots(1+a^nx)=1+A_1x+A_2x^2+\ldots+A_nx^n=P_x;$$

on observera ensuite que $P_{ax} = P_x \dfrac{1+a^{n+1}x}{1+ax}$.

8. Conclure de là que $(x^n-1)(x^{n-1}-1)\ldots(x^{n-i+1}-1)$ est divisible par $(x-1)(x^2-1)\ldots(x^i-1)$.

9. Développer, à l'aide d'un artifice analogue à celui de l'exercice 7, le produit

$$(1+ax)(1+a^3x)(1+a^5x)\ldots(1+a^{2n+1}x).$$

10. On a

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\ldots(1+x^{2^n}) = 1+x+x^2+x^3+\ldots+x^{2^{n+1}-1}.$$

11. Pour que

$$\frac{A+Bx+Cy+Dz}{A'+B'x+C'y+D'z}$$

conserve la même valeur quels que soient x, y, z, il faut et il suffit que

$$\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'}=\frac{D}{D'}.$$

12. En général, pour que le rapport de deux polynômes entiers en

$x, y, z, \ldots$ ne dépende pas de $x, y, z, \ldots$, il faut et il suffit que ces polynômes aient leurs coefficients proportionnels.

13. On a

$$\left(x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}}\right) + 2\left(x^{n-2} + \frac{1}{x^{n-2}}\right) + \cdots$$
$$+ (n-2)\left(x + \frac{1}{x}\right) + n - 1 = \frac{1}{x^{n-1}}\left(\frac{x^n - 1}{x - 1}\right)^2.$$

14. Prouver que

$$(\cos\alpha + x\sin\alpha)^m - \cos m\alpha - x\sin m\alpha$$

est divisible par $1 + x^2$. (Il est bien entendu que les exercices que nous proposons doivent être résolus avec le seul secours des matières exposées précédemment, et non à l'aide de celles qui sont exposées dans la suite.)

15. $(x+y)^m - x^m - y^m$ est divisible par $x^2 + xy + y^2$ quand m est impair et ne contient pas 3 en facteur. (Cauchy.)

CHAPITRE IV.

THÉORIE DES RADICAUX ARITHMÉTIQUES.

I. — DÉFINITIONS.

On appelle *puissance* $n^{\text{ième}}$ de A, comme on sait, le produit de n facteurs égaux à A.

On appelle *racine* $n^{\text{ième}}$ de A un nombre qui, élevé à la puissance n, reproduit A; cette racine se désigne par le symbole suivant, appelé *radical*,

$$\sqrt[n]{A},$$

où n désigne ce que l'on appelle l'*indice* du radical.

Si le nombre A est positif et s'il n'existe pas de nombre entier ou fractionnaire dont la puissance $n^{\text{ième}}$ soit A, on appellera *racine* $n^{\text{ième}}$ *de* A la limite vers laquelle tendent les fractions croissantes dont la $n^{\text{ième}}$ puissance est inférieure à A, ou décroissantes dont la $n^{\text{ième}}$ puissance est supérieure à A.

D'après ces conventions, tout nombre positif aura une racine $n^{\text{ième}}$ positive, et une seule; de plus, il aura une racine négative égale et de signe contraire à sa racine positive si n est pair.

Les racines d'ordre pair des nombres négatifs n'existent pas; enfin les nombres négatifs ont une racine d'ordre impair négative.

Ces théorèmes sont trop faciles à démontrer pour qu'il soit nécessaire de nous y arrêter plus longtemps.

On effectue sur les radicaux des opérations qui ont beaucoup d'analogie avec celles que l'on effectue sur les fractions; nous allons les passer successivement en revue. Nous supposerons toujours les quantités placées sous les radicaux positives; enfin nous ne considérerons que la valeur positive des radicaux, en un mot leur *valeur arithmétique*.

II. — RÉDUCTION DES RADICAUX AU MÊME INDICE.

THÉORÈME I. — *Lorsque l'on multiplie par un certain nombre l'indice d'un radical, on en extrait la racine dont l'indice est égal à ce nombre.*

Considérons le radical

$$\sqrt[m]{a}.$$

Multiplions son indice par n, il devient

$$\sqrt[mn]{a}.$$

Or, le produit de mn facteurs égaux à $\sqrt[mn]{a}$ est égal à a; donc le produit de n facteurs égaux à $\sqrt[mn]{a}$ donne un nombre qui, pris m fois comme facteur, reproduit a : ce nombre est donc $\sqrt[m]{a}$. On a donc

$$\sqrt[mn]{a} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}.$$

THÉORÈME II. — *Lorsque l'on divise l'indice d'un radical par un de ses sous-multiples, il se trouve élevé à une puissance dont l'exposant est égal à ce sous-multiple.*

THÉORÈME III. — *Lorsque l'on élève la quantité placée sous un radical à une certaine puissance, le radical se trouve élevé à cette puissance.*

En effet, considérons le radical

$$\sqrt[m]{a^n}.$$

Si l'on élève ce radical à la puissance m, on trouve a^n; tandis que $\sqrt[m]{a}$ élevé à la puissance m ne donne que a. Mais le produit de n facteurs égaux à $\sqrt[m]{a}$ élevé à la puissance m donnera a^n; ainsi donc $(\sqrt[m]{a})$ et $\sqrt[m]{a^n}$ sont deux nombres (positifs par hypothèse) qui, élevés à la puissance m, deviennent égaux. Ce sont donc les racines $m^{\text{ièmes}}$ d'un même nombre; ce sont donc deux quantités égales; donc enfin

$$(\sqrt[m]{a})^n = \sqrt[m]{a^n}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Remarque. — Il est bien entendu, comme nous l'avons dit en commençant cette théorie, qu'il ne s'agit ici que de nombres positifs; ainsi, il est bien clair que l'on n'a pas

$$\sqrt[2]{1^2} = (\sqrt[2]{1})^2$$

si l'on prend les radicaux négativement.

Théorème IV. — *Lorsque l'on multiplie l'indice d'un radical par un certain nombre et que l'on élève la quantité placée sous le radical à une puissance dont l'exposant est marqué par ce nombre, le radical ne change pas de valeur.*

De là un moyen de comparer deux radicaux. Pour y parvenir, on les réduit au même indice en multipliant l'indice de chacun d'eux par l'indice de l'autre et en élevant la quantité placée sous chaque radical à une puissance dont l'exposant est égal à l'indice de l'autre radical.

S'agit-il, par exemple, de trouver le plus grand des deux nombres

$$\sqrt[5]{4}, \quad \sqrt[7]{6},$$

on réduira les radicaux au même indice, et l'on aura

$$\sqrt[35]{4^7}, \quad \sqrt[35]{6^5}.$$

III. — MULTIPLICATION ET DIVISION DES RADICAUX.

THÉORÈME I. — *On a*

$$\sqrt[m]{A} \times \sqrt[m]{B} = \sqrt[m]{A.B}.$$

En effet, élevons le premier membre de cette égalité à la puissance m, il faudra faire le produit de m facteurs égaux à $\sqrt[m]{A}$ et de m facteurs égaux à $\sqrt[m]{B}$, on obtiendra ainsi AB; donc le premier membre de l'égalité est bien égal à la racine $m^{\text{ième}}$ de AB, c'est-à-dire au second.

Cette démonstration s'applique évidemment à un nombre quelconque de facteurs, et l'on en déduit, ce que nous savions déjà,

$$(\sqrt[m]{A})^n = \sqrt[m]{A^n}.$$

THÉORÈME II. — *On a*

$$\sqrt[m]{A} : \sqrt[m]{B} = \sqrt[m]{A : B}.$$

En effet, en multipliant $\sqrt[m]{A : B}$ par $\sqrt[m]{B}$, on trouve $\sqrt[m]{A}$.

Lorsque l'on veut faire le produit ou le quotient de deux radicaux qui n'ont pas le même indice, on commence par les réduire au même indice, après quoi l'opération n'offre plus la moindre difficulté.

THÉORÈME III. — *Si l'on a une suite de rapports égaux*

$$(1) \qquad \frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} = \frac{a''}{b''} = \ldots,$$

on a encore

$$\frac{a}{b} = \frac{\sqrt[n]{a^n + a'^n + a''^n + \ldots}}{\sqrt[n]{b^n + b'^n + b''^n + \ldots}}.$$

En effet, des formules (1) on tire

$$\frac{a^n}{b^n}=\frac{a'^n}{b'^n}=\frac{a''^n}{b''^n}=\ldots,$$

et par suite (p. 32)

$$\frac{a^n}{b^n}=\frac{a^n+a'^n+a''^n+\ldots}{b^n+b'^n+b''^n+\ldots},$$

c'est-à-dire

$$\frac{a}{b}=\frac{\sqrt[n]{a^n+a'^n+a''^n+\ldots}}{\sqrt[n]{b^n+b'^n+b''^n+\ldots}}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

IV. — FORMULE DU BINOME.

La formule du binôme a pour but de faire connaître le développement de $(x+a)^n$ en polynôme ordonné suivant les puissances de x. Il est bien évident que $(x+a)^n$ est un polynôme en x du degré n; on peut donc poser

$$(1) \qquad (x+a)^n = A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + A_{n-2} x^{n-2} + \ldots + A_0,$$

A_n, $A_{n-1}, \ldots, A_0$ étant des coefficients indéterminés. Si dans cette formule on change x en z, il vient

$$(z+a)^n = A_n z^n + A_{n-1} z^{n-1} + \ldots + A_0.$$

Si l'on retranche l'une de l'autre ces deux égalités, on trouve

$$(x+a)^n-(z+a)^n$$
$$= A_n(x^n-z^n) + A_{n-1}(x^{n-1}-z^{n-1}) + \ldots + A_1(x-z).$$

Or on a

$$(x+a)-(z+a)=x-z.$$

Divisant membre à membre ces deux égalités, on trouve (p. 40)

$$\begin{aligned}(x+a)^{n-1}+(z+a)(x+a)^{n-2}+\ldots+(z+a)^{n-1}\\ = A_n(x^{n-1}+zx^{n-2}+\ldots+z^{n-1})\\ + A_{n-1}(x^{n-2}+zx^{n-3}+\ldots+z^{n-2})+\ldots+A_1.\end{aligned}$$

Cette égalité a lieu en laissant x fixe pour toutes les valeurs possibles de z, excepté peut-être pour $z=x$, car nos calculs n'offrent aucun sens dans ce cas. Néanmoins, comme les deux membres sont deux polynômes entiers en z, égaux pour plus de valeurs de z qu'il n'y a d'unités dans leurs degrés, ils sont égaux quel que soit z, et en particulier pour $z=x$. Si l'on fait alors $z=x$, on trouve

$$n(x+a)^{n-1} = nA_n x^{n-1} + (n-1)A_{n-1}x^{n-2}+\ldots+A_1.$$

Multiplions les deux membres de cette formule par $x+a$, nous trouvons

$$n(x+a)^n = nA_n x^n + [(n-1)A_{n-1}+naA_n]x^{n-1}+\ldots+A_1 a.$$

Or, en multipliant par n les deux membres de (1), on trouve

$$n(x+a)^n = nA_n x^n + nA_{n-1}x^{n-1}+\ldots+nA_0.$$

Or les deux développements que nous trouvons pour $n(x+a)^n$ doivent être identiques; on a donc (p. 44)

$$nA_n = nA_n,\quad nA_{n-1} = (n-1)A_{n-1}+naA_n,\quad \ldots,$$

ou

$$A_n = A_n,\quad A_{n-1} = \frac{n}{1}aA_n,\quad A_{n-2} = \frac{n-1}{2}aA_{n-1},\quad \ldots.$$

La loi suivant laquelle procèdent ces égalités est évidente, et, quand on connaîtra A_n, on calculera successive-

ment A_{n-1}, A_{n-2}, ..., et l'on aura

$$A_{n-1} = \frac{n}{1} a A_n, \quad A_{n-2} = \frac{n(n-1)}{1.2} a^2 A_n,$$

$$A_{n-3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} a^3 A_n, \ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$A_{n-\alpha} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-\alpha+1)}{1.2.3\ldots\alpha} a^\alpha A_n.$$

Si l'on substitue ces valeurs dans la formule (1), il vient

$$(x+a)^n = A_n \left[x^n + \frac{n}{1} a x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2} a^2 x^{n-2} + \ldots \right.$$
$$\left. + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-\alpha+1)}{1.2.3\ldots\alpha} a^\alpha x^{n-\alpha} + \ldots + a^n \right].$$

Cette formule devant avoir lieu quel que soit x, on peut supposer $x = 0$; il vient alors

$$a^n = A_n a^n,$$

c'est-à-dire $A_n = 1$; d'où l'on conclut finalement

$$(x+a)^n = x^n + \frac{n}{1} a x^{n-1} \frac{n(n-1)}{1.2} a^2 x^{n-2} + \ldots$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-\alpha+1)}{1.2.3\ldots\alpha} a^\alpha x^{n-\alpha} + \ldots + a^n.$$

Telle est la formule que nous voulions établir.

V. — PUISSANCE $n^{\text{ième}}$ D'UN POLYNOME.

Lorsque, dans un polynôme, tous les termes se forment d'après une même loi, c'est-à-dire en attribuant dans un même terme et à une même lettre les valeurs entières successives m, $m+1$, $m+2$, ..., m', on le représente à l'aide d'une notation abrégée qui consiste à placer le

terme qui sert à former tous les autres après la lettre grecque $\sum$, au-dessus et au-dessous de laquelle on écrit m et m'; ainsi

$$\sum_{n=m}^{n=m'} a_n$$

représentera la quantité

$$a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_{m'},$$

et on lira *somme* ou *sigma de* $n = m$ *jusqu'à* $n = m'$ *de* a_n. La formule du binôme, en faisant usage de la notation en question, pourra s'écrire

$$(x+a)^n = x^n + \sum_{\alpha=1}^{\alpha=n} \frac{n(n-1)\ldots(n-\alpha+1)}{1.2.3\ldots\alpha} a^\alpha x^{n-\alpha}.$$

On se sert aussi de la notation abrégée

$$\prod_{n=m}^{n=m'} a_n$$

pour désigner le produit $a_m a_{m+1} a_{m+2} \ldots a_{m'}$; de sorte que la formule du binôme peut encore s'écrire

$$(x+a)^n = x^n + \sum_{\alpha=1}^{\alpha=n} \prod_{\mu=1}^{\mu=\alpha} \frac{n-\mu+1}{\mu} a^\alpha x^{n-\alpha}.$$

Proposons-nous actuellement de trouver le développement de $(a+b+c+\ldots)^n$; dans la formule du binôme, le terme général

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-\alpha+1)}{1.2.3\ldots\alpha} a^\alpha x^{n-\alpha}$$

peut s'écrire, en multipliant et en divisant par $1.2.3\ldots(n-\alpha)$,

$$\frac{1.2.3.4\ldots n}{1.2.3\ldots\alpha.1.2.3\ldots(n-\alpha)}a^\alpha x^{n-\alpha}.$$

Si alors nous changeons x en $x+b$, ce terme deviendra

$$\frac{1.2.3\ldots n}{1.2.3\ldots\alpha.1.2.3\ldots(n-\alpha)}a^\alpha(x+b)^{n-\alpha},$$

c'est-à-dire

$$\sum_{\beta=0}^{\beta=n}\frac{1.2.3\ldots n}{1.2.3\ldots\alpha.1.2.3\ldots(n-\alpha)}\times\frac{1.2.3\ldots(n-\alpha)}{1.2.3\ldots\beta.1.2.3\ldots(n-\alpha-\beta)}a^\alpha b^\beta x^{n-\alpha-\beta}.$$

En convenant de remplacer $1.2.3\ldots\beta$ par 1 quand on fait $\beta=0$, cette formule peut encore s'écrire

$$\sum_{\beta=0}^{\beta=n}\frac{1.2.3\ldots n}{1.2.3\ldots\alpha.1.2.3\ldots\beta.1.2.3\ldots(n-\alpha-\beta)}a^\alpha b^\beta x^{n-\alpha-\beta},$$

et la quantité écrite sous le signe $\sum$ représente le terme général du développement de $(a+b+x)^n$; si nous changeons alors x en $x+c$, et ainsi de suite, il est facile de voir que l'on arrive à la formule générale

$$(1)\quad\left\{\begin{array}{l}(a+b+c+\ldots+l)^n\\ \quad=\sum\dfrac{1.2.3\ldots n}{1.2.3\ldots\alpha.\,1.2.3\ldots\beta.\,1.2.3\ldots\gamma\ldots\,1.2.3\ldots\lambda}a^\alpha b^\beta c^\gamma\ldots l^\lambda,\end{array}\right.$$

le signe $\sum$ s'étendant à toutes les valeurs de $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda$, telles que $\alpha+\beta+\gamma+\ldots+\lambda=n$, en convenant toujours de remplacer $1.2.3\ldots m$ par 1 toutes les fois que l'on a $m=0$.

VI. — RACINES DES POLYNOMES.

On dit qu'un polynôme entier par rapport à x

$$P = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0$$

est *une puissance* $m^{\text{ième}}$ *parfaite*, lorsqu'il existe un polynôme

$$Q = b_i x^i + b_{i-1} x^{i-1} + \ldots + b_0$$

entier qui, élevé à la puissance m, reproduit P, quel que soit x.

Proposons-nous de reconnaître si un polynôme est une puissance $m^{\text{ième}}$ parfaite, et dans ce cas cherchons sa racine. Considérons le polynôme

$$P = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0;$$

si sa racine $m^{\text{ième}}$ existe, désignons-la par

$$Q = b_i x^i + b_{i-1} x^{i-1} + \ldots + b_0.$$

Appliquons au polynôme Q la formule que nous avons démontrée au paragraphe précédent, nous aurons

$$Q^m = b_i^m x^{mi} + \frac{1.2.3\ldots m}{1.2.3\ldots(m-1)} b_i^{m-1} b_{i-1} x^{mi-1} + \ldots$$

ou bien

$$Q^m = b_i^m x^{mi} + m b_i^{m-1} b_{i-1} x^{mi-1} + \ldots.$$

En identifiant les polynômes P et Q^m, on trouve

$$b_i^m x^{mi} = a_n x^n,$$

$$m b_i^{m-1} b_{i-1} x^{mi-1} = a_{n-1} x^{n-1}.$$

De la première de ces formules on conclut que :

1° $mi = n$ ou $i = \frac{n}{m}$: donc n doit être divisible par m; supposons qu'il en soit ainsi;

2° b_i est la racine $m^{\text{ième}}$ de a_n.

De la seconde formule on tire

$$b_{i-1} = \frac{1}{m}\frac{a_{n-1}}{b_i^{m-1}} = \frac{1}{m}\frac{a_{n-1}}{b_i^m}b_i$$

ou

$$b_{i-1} = \frac{1}{m}\frac{a_{n-1}}{a_n}b_i.$$

Supposons que l'on ait calculé b_i et b_{i-1}; du polynôme P on retranchera $(b_i x^i + b_{i-1}x^{i-1})^m$; le reste sera composé comme il suit :

$$m(b_i x^i + b_{i-1}x^{i-1})^{m-1}(b_{i-2}x^{i-2} + \ldots + b_0) + \ldots.$$

Or, dans cette expression, le terme du degré le plus élevé est

$$mb_i^m b_{i-2}x^{mi-2};$$

en l'égalant au terme du degré le plus élevé dans le résultat trouvé directement et que nous désignerons par c, on trouve

$$b_{i-2} = \frac{c}{mb_i^m b_{i-2}}.$$

Connaissant b_{i-2}, on retranchera du polynôme P la quantité

$$(b_i x^i + b_{i-1}x^{i-1} + b_{i-2}x^{i-2})^m,$$

et l'on continuera ainsi jusqu'à ce que l'on tombe sur un reste nul ou sur une soustraction impossible à effectuer.

VII. — CAS DE LA RACINE CARRÉE.

Le cas de la racine carrée étant le plus simple, nous nous y arrêterons un instant, et d'abord nous ferons obser-

ver que l'on a

$$(a+b+c+\ldots+l)^2$$
$$=a^2+2ab+2bc^2+\ldots+b^2+2bc+\ldots+c^2+\ldots+l^2.$$

Cette formule s'obtient en faisant $n=2$ dans la formule (1) (p. 67), ou bien encore directement, en observant que

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2,$$
$$(a+b+c)^2=a^2+2(b+c)a+(b+c)^2$$
$$=a^2+2ab+2ac+b^2+2bc+c^2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Le carré d'un polynôme se compose donc, comme on voit, de la somme des carrés de ses termes et de leurs doubles produits.

Ceci posé, proposons-nous d'extraire la racine carrée du polynôme

$$P=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\ldots+a_0.$$

Si nous désignons par

$$Q=b_i x^i+b_{i-1}x^{i-1}+\ldots+b_0$$

la racine, nous trouverons, comme tout à l'heure,

$$b_i=\sqrt{a_n},\quad b_{i-1}=\frac{1}{2}\,\frac{a_{n-1}}{b_i}.$$

Nous retrancherons de P la quantité $(b_i x^i+b_{i-1}x^{i-1})^2$; nous obtiendrons enfin b_{i-2} comme tout à l'heure; mais, au lieu de retrancher de P le carré de

$$b_i x^i+b_{i-1}x^{i-1}+b_{i-2}x^{i-2},$$

nous nous contenterons de retrancher du premier reste que nous avons obtenu la quantité

$$2b_{i-2}x^{i-2}(b_i x^i+b_{i-1}x^{i-1})+b_{i-2}^2(x^{i-2})^2,$$

et ainsi de suite. Une simplification analogue pourrait sans doute être apportée dans le calcul de la racine $m^{\text{ième}}$, mais les calculs exigeraient une grande attention de la part de celui qui se livrerait à ce genre de spéculations.

VIII. — REMARQUES.

Nous avons supposé que les polynômes dont nous cherchions les racines étaient ordonnés par rapport aux puissances décroissantes d'une même lettre; l'hypothèse contraire aurait pu être adoptée : elle conduit à cette conclusion :

L'exposant du terme du degré le moins élevé d'une puissance $n^{\text{ième}}$ exacte doit être zéro, n ou un multiple de n.

Il est souvent avantageux de modifier la marche que nous avons suivie ainsi qu'il suit :

On développe l'expression Q^n par la formule de la page 67; on identifie ensuite le polynôme P avec le développement de Q^n. On a ainsi des égalités qui permettent, à l'aide de procédés que nous étudierons plus loin, de déterminer $b_0, b_1, \ldots, b_i$.

APPLICATION. — *Trouver la condition pour que*

$$ax^2 + bx + c = \text{P}$$

soit un carré parfait.

L'expression précédente ne peut être que le carré d'un polynôme du premier degré. Posons alors

$$ax^2 + bx + c = (mx + n)^2,$$

ou bien

$$ax^2 + bx + c = m^2x^2 + 2mnx + n^2;$$

on en déduit

$$a = m^2, \quad b = 2mn, \quad c = n^2.$$

De ces formules on tire sans difficulté

$$b^2 = 4ac.$$

Cette relation est donc nécessaire pour que le polynôme P soit un carré parfait : elle est suffisante. En effet, alors on a

$$P = ax^2 + 2\sqrt{ac}\,x + c,$$

ou

$$P = (\sqrt{a})^2 x^2 + 2\sqrt{a}\sqrt{c}x + (\sqrt{c})^2,$$

ou

$$P = (\sqrt{a}x + \sqrt{c})^2.$$

EXERCICES ET NOTES.

1. Si l'on a

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} = \frac{a''}{b''} = \ldots,$$

chacun de ces rapports sera égal à l'un quelconque des suivants :

$$\frac{\sqrt[n]{a^n + a'^n + a''^n + \ldots}}{\sqrt[n]{b^n + b'^n + b''^n + \ldots}}, \quad \frac{\sqrt{aa'}}{\sqrt{bb'}}, \quad \frac{\sqrt[3]{aa'a''}}{\sqrt[3]{bb'b''}}, \quad \ldots.$$

2. Si l'on a

$$\frac{b_1}{B_1} = \frac{b_2}{B_2} = \frac{b_3}{B_3} = \ldots,$$

on aura

$$\sqrt{B_1 b_1} + \sqrt{B_2 b_2} + \sqrt{B_3 b_3} + \ldots$$
$$= \sqrt{(B_1 + B_2 + B_3 + \ldots)(b_1 + b_2 + b_3 + \ldots)}.$$

Déduire de là la mesure du tronc de pyramide en le décomposant en troncs triangulaires.

3. Désignons par $2a_{ij} = 2a_{ji}$ le coefficient de $x_i x_j$ dans un polynôme du second degré P ; ce polynôme pourra s'écrire

$$P = \Sigma a_{ij} x_i x_j$$

(ainsi, pour le cas de deux variables,

$$\Sigma a_{ij} x_i x_j = a_{11} x_1^2 + 2 a_{12} x_1 x_2 + a_{22} x_2^2).$$

Démontrer que, pour que le polynôme P soit un carré parfait, il faut que, quels que soient i et j, on ait

$$a_{ij}^2 = a_{ii} a_{jj}.$$

Mais cette condition n'est pas suffisante, il faut y adjoindre certaines inégalités ; ainsi

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2yz - 2xz - 2xy$$

n'est pas un carré.

4. Prouver que l'on a

$$\begin{aligned} &-(x^2 + y^2 + z^2 - 2yz - 2xz - 2xy) \\ &= (\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z})(-\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}) \\ &\quad \times (\sqrt{x} - \sqrt{y} + \sqrt{z})(\sqrt{x} + \sqrt{y} - \sqrt{z}). \end{aligned}$$

5. Trouver la condition pour que $x^3 + px^2 + qx + r$ soit un cube parfait.

6. Prouver que l'on a

$$\begin{aligned} &(a + b + c + \ldots + l)^3 \\ &= a^3 + b^3 + c^3 + \ldots + l^3 + 3(a^2 b + a^2 c + \ldots + b^2 a + b^2 c + \ldots + k^2 l) \\ &\quad + 6(abc + abd + bdc + \ldots). \end{aligned}$$

7. Appliquer la méthode des coefficients indéterminés à l'extraction de la racine carrée d'un polynôme, par exemple

$$x^6 - 12x^5 + 60x^4 - 160x^3 + 240x^2 - 192x + 64.$$

8. Démontrer que tout polynôme P de degré pair $2m$ est de la forme

$$P = H^2 + K,$$

H désignant un polynôme de degré m et K un polynôme de degré $m - 1$ au plus. (Généraliser.)

9. Trouver la condition pour que $x^3 + px^2 + qx + r$ soit divisible par un carré.

10. Trouver la condition qui doit exister entre les coefficients p, q, r pour que $x^6 + px^4 + qz^2 + r$ soit un carré parfait.

11. Montrer comment, en suivant un procédé analogue à celui que l'on suit pour extraire la racine carrée d'un nombre, on pourrait extraire la racine cinquième d'un nombre donné.

12. Trouver les relations qui doivent exister entre p, q, r, s pour que

$$x^4 + 4px^3 + 6qx^2 + 4px + s$$

soit un carré parfait. (On traitera cette question soit par la méthode des coefficients indéterminés, soit en exprimant que le reste provenant de l'extraction de la racine carrée est nul.)

13. Soient $a, b, c, \ldots, A, B, C, \ldots, A', B', C', \ldots, P, Q, \ldots$ des nombres rationnels, et $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}, \ldots$ des irrationnelles, prouver que la fraction

$$\frac{A + B\sqrt{a} + C\sqrt{b} + \ldots}{A' + B'\sqrt{a} + C'\sqrt{b} + \ldots}$$

peut se ramener à la forme

$$P + Q\sqrt{a} + R\sqrt{b} + \ldots.$$

14. Prouver que, si α est moindre que $\frac{1}{2}$ en valeur absolue, on a

$$\sqrt{1+\alpha} = 1 + \frac{\alpha}{2} \pm x,$$

x désignant une quantité moindre que $\frac{\alpha^2}{4}$. Si α est positif, on aura $x < \frac{\alpha^2}{8}$.

CHAPITRE V.

ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ.

I. — PRINCIPES GÉNÉRAUX.

Lorsque, dans une égalité, les deux membres sont égaux, quelles que soient les valeurs attribuées aux lettres, cette égalité porte le nom d'*identité;* telles sont, par exemple, les égalités

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2,$$
$$(x-a)^2=x^2-2ax+a^2.$$

Lorsque, au contraire, l'égalité n'a lieu que pour certaines valeurs des lettres qu'il s'agit de déterminer, elle porte le nom d'*équation;* les valeurs positives ou négatives des lettres qui rendent les deux membres réellement égaux portent le nom de *racines* de l'équation. Quoi qu'il en soit, on confond souvent dans le langage les mots *égalité, équation;* au fond, cela n'a pas grand inconvénient.

THÉORÈME I. — *On ne change pas les racines d'une équation en ajoutant une même quantité aux deux membres.*

En effet, considérons l'équation

$$(1) \qquad A=B.$$

Soient x, y, z, ... les inconnues, ou, si l'on veut, les lettres dont on doit déterminer les valeurs pour rendre A réellement égal à B; il est bien évident que les systèmes

de valeurs de $x, y, z, \ldots$, qui rendent A égal à B, rendront encore $A + m$ égal à $B + m$; que réciproquement les systèmes de valeurs qui rendent $A + m$ égal à $B + m$ rendront encore A égal à B : en d'autres termes, l'équation considérée a mêmes racines que

$$(2) \qquad A + m = B + m.$$

Cette règle comporte une exception : si la quantité m cessait d'être définie algébriquement pour des valeurs de x, $y, z, \ldots$ qui rendent A égal à B, l'équation (2) pourrait ne plus admettre les racines de l'équation (1).

Corollaire. — Le signe de m ayant été supposé quelconque, on peut dire que l'on ne change pas les racines d'une équation en retranchant une même quantité aux deux membres.

Théorème II. — *On n'altère pas les racines d'une équation en multipliant ses deux membres par une même quantité ne contenant pas les inconnues.*

En effet, considérons l'équation

$$A = B;$$

si l'on multiplie par m les deux membres de cette équation, il est bien clair que, si pour un système quelconque de valeurs des inconnues on a $A = B$, on aura encore $Am = Bm$; et réciproquement, si l'on a $Am = Bm$, on aura pour les mêmes valeurs des inconnues $A = B$. Il y a cependant un cas d'exception : si, en effet, A était différent de B, on pourrait avoir Am égal à Bm si m pouvait passer par zéro; or il n'y aura rien à craindre à cet égard si m ne contient pas les inconnues et si l'on ne choisit pas le facteur m égal à zéro, ce qui n'aurait aucun but raisonnable.

Nous allons montrer sur un exemple que, en multipliant par un même facteur les deux membres d'une équation, on peut introduire de nouvelles racines. L'équation

$$x = 1$$

admet évidemment la racine 1 et la racine 1 seulement. En multipliant par $x - 2$ les deux membres, on a

$$(x - 2)x = x - 2,$$

et il est facile de voir que la nouvelle équation admet la racine $x = 2$; cela tient à ce que le facteur $x - 2$ passe par zéro pour $x = 2$. En général, *quand on multiplie par m les deux membres d'une équation, on introduit dans cette équation les solutions de l'équation* $m = 0$.

En effet, les systèmes de valeurs des inconnues x, y, z, ..., qui rendent Am égal à Bm, rendront A égal à B ou m égal à zéro; donc ils appartiennent à l'une des deux équations

$$A = B, \quad m = 0.$$

Si cependant, en supposant $m = 0$, A et B cessaient d'être algébriquement définis, il est clair que Am = Bm n'entraînerait pas $m = 0$, car on ne pourrait pas dire que Am et Bm sont nuls si A et B n'existaient pas. Pour me faire comprendre, je choisis un exemple : l'équation

$$\frac{1}{x} = 1$$

admet la racine $x = 1$ et n'admet évidemment que celle-là, puisque pour $x \gtrless 1$ on a $\frac{1}{x} \lessgtr 1$. Multiplions par x les deux membres de cette équation, nous n'introduisons pas pour cela la racine $x = 0$, parce que $\frac{1}{x}$ n'existe plus, en un mot n'est plus défini en supposant le diviseur x égal à

zéro, et effectivement l'équation en question devient

$$1 = x$$

quand on multiplie par x ses deux membres.

De même l'équation $A = B$ pourrait être satisfaite pour certaines valeurs de $x, y, z, \ldots$, sans que

$$Am = Bm$$

le fût pour les mêmes valeurs de $x, y, \ldots$, car m pourrait n'être plus défini pour les valeurs de $x, y, z, \ldots$, qui rendent A égal à B.

En résumé, quand on multiplie les deux membres d'une équation par une même quantité, on ne change pas les racines si cette quantité est indépendante des inconnues; si, au contraire, le multiplicateur en question contient les inconnues, il peut se faire que l'on change les racines, que l'on en introduise de nouvelles, ou enfin que l'on en supprime.

THÉORÈME III. — *On peut diviser par une même quantité les deux membres d'une équation sans changer les racines, pourvu que cette quantité ne contienne pas les inconnues.*

Ce théorème, au fond, revient au précédent et donne lieu aux mêmes remarques, si l'on observe que multiplier par $\frac{1}{m}$ et diviser par m sont deux opérations équivalentes.

THÉORÈME IV. — *Lorsque deux équations admettent les mêmes racines, l'équation que l'on obtient en les ajoutant ou en les retranchant membre à membre peut remplacer l'une quelconque d'entre elles.*

En effet, considérons les deux équations en $x, y, z, \ldots$

$$A = B, \quad (1)$$

$$C = D; \quad (2)$$

les systèmes de valeurs de $x, y, z, \ldots$, qui rendent à la fois A égal à B et C égal à D, rendent A + C égal à B + D, et réciproquement les systèmes qui satisfont à l'équation

$$(3) \qquad A + C = B + D$$

et à l'une quelconque des équations (1) ou (2) satisfont à l'autre.

Remarques. — On peut évidemment aussi remplacer un système de n équations par $n-1$ d'entre elles, et celle que l'on obtient par l'addition des autres effectuée membre à membre; il est bien évident aussi que la différence effectuée membre à membre de deux équations peut remplacer l'une quelconque d'entre elles, etc.

Théorème V. — *En général, on ne change pas les racines d'un système d'équations quand on remplace l'une d'elles par celle que l'on obtient en les multipliant membre à membre.*

Il est bien évident, en effet, que, si un certain système de valeurs des inconnues $x, y, z, \ldots$ rend identiques les équations

$$A = B, \quad C = D, \quad E = F, \quad \ldots,$$

le même système de valeurs rendra identique l'équation

$$A \times C \times E \times \ldots = B \times D \times F \times \ldots;$$

et réciproquement, de cette équation combinée avec

$$C = D, \quad E = F, \quad \ldots$$

on déduira $A = B$. Mais cette règle est soumise à des exceptions; ainsi, par exemple, l'équation

$$AC = BD,$$

jointe à l'équation

$$A = B,$$

entraîne non-seulement l'équation

$$C = D,$$

mais encore, si A et D peuvent passer par zéro, l'équation

$$A = D.$$

C'est ainsi que les équations

$$x - y = 0, \quad x + y = 2,$$

qui n'admettent évidemment que la solution $x = y = 1$, multipliées membre à membre, fournissent l'équation

$$x^2 - y^2 = 0,$$

qui, combinée avec $x - y = 0$, ne peut pas remplacer

$$x + y = 0;$$

car le système

$$x^2 - y^2 = 0, \quad x - y = 0$$

admet une infinité de solutions, à savoir toutes les valeurs possibles pour x, à condition que les valeurs correspondantes de y auront une valeur absolue égale à celle de x.
Nous ne pousserons pas plus loin la théorie des transformations que l'on peut faire subir aux équations; l'usage en fera connaître d'autres, soumises, en général, aux mêmes restrictions que celles dont nous venons de parler.

II. — USAGE DES PRINCIPES PRÉCÉDENTS.

Résoudre une équation ou un système d'équations, c'est chercher leurs racines.

Lorsqu'une équation est de la forme

$$P = Q,$$

P et Q désignant des polynômes entiers de degré m par

rapport aux inconnues, on dit qu'elle est *du degré m*. Lorsque l'un des polynômes P, Q est de degré inférieur à m, l'autre restant du degré m, on dit encore que l'équation est du degré m.

Pour résoudre une équation ou un système d'équations, on commence, en général, par effectuer les opérations indiquées : on ramène de cette façon les deux membres à être aussi simples que possible ; on chasse ensuite les dénominateurs, ce qui se fait en multipliant les deux membres de chaque équation par le produit des dénominateurs qui entrent dans ses deux membres.

Il peut se faire ainsi que l'on altère les racines : il faudra discuter les résultats, afin d'étudier l'effet produit sur le système que l'on cherche à résoudre. On fait ensuite passer les termes qui contiennent les inconnues dans un même membre et les termes indépendants des inconnues dans l'autre; on fait passer un terme d'un membre d'une équation dans un autre en changeant son signe. Cette opération revient, en effet, à retrancher aux deux membres de l'équation une même quantité égale au terme en question; enfin, s'il y a lieu, on réduit les termes semblables.

La règle que nous venons de donner est une règle générale et qui, bien entendu, n'a rien d'absolu. Nous avons dit que pour chasser les dénominateurs d'une équation il fallait multiplier les deux membres par le produit des dénominateurs; il suffit d'en multiplier les deux membres par le plus petit multiple des dénominateurs, dans lesquels chaque lettre sera considérée comme représentant un facteur premier.

Quelquefois on conserve à dessein dans une équation certains dénominateurs, mais on peut en faire disparaître d'autres. Pour faire disparaître un dénominateur, il suffit évidemment de multiplier les deux membres de l'équation

par ce dénominateur, ce qui se fait en multipliant par le dénominateur en question tous les termes qui ne le contiennent pas et en l'effaçant dans les termes qui le contiennent.

Pour donner une application des principes précédents, nous nous proposerons de résoudre l'équation

$$\frac{x}{x+1} + 3x = 4(x-1) - \frac{6x-7}{6}.$$

Chassons les dénominateurs en multipliant par 6 et par $x+1$, il vient

$$6x + 18x(x+1) = 24(x-1)(x+1) - (6x-7)(x+1).$$

En multipliant par $x+1$, nous avons pu introduire la solution $x = -1$ de l'équation

$$x+1=0.$$

Mais pour $x = -1$ le premier membre de l'équation proposée n'est plus défini, car il contient le terme $\frac{x}{x+1}$ ou $\frac{-1}{0}$; en sorte qu'il peut se faire que nous n'ayons pas introduit de nouvelle solution : la suite nous l'apprendra.

Si nous effectuons les produits indiqués, il vient

$$6x + 18x^2 + 18x = 24x^2 - 24 - 6x^2 + x + 7;$$

réduisons les termes semblables, nous aurons

$$18x^2 + 24x = 18x^2 + x - 17.$$

Si nous faisons passer dans le premier membre les termes qui contiennent l'inconnue, il vient

$$23x = -17,$$

et, en divisant par 23 les deux membres, on a

$$x = -\frac{17}{23};$$

nous ne retrouvons pas la solution $x = -1$; on en conclut que $x = -\frac{17}{23}$ satisfait seul à l'équation proposée, ce que l'on peut du reste vérifier directement.

Nous allons voir maintenant comment on simplifie, à l'aide d'artifices de calcul, la règle générale que nous avons donnée. Proposons-nous de résoudre l'équation

$$\frac{x+1}{x-1} = \frac{x+7}{x+3}.$$

S'il y a égalité entre les deux membres de cette équation pour une certaine valeur de x, nous pourrons de chaque numérateur retrancher son dénominateur, diviser les numérateurs par les résultats, et il y aura encore égalité pour la même valeur de x (*voir* p. 32). Il vient ainsi

$$\frac{x+1}{2} = \frac{x+7}{4};$$

et, en multipliant par 4 les deux membres de cette égalité,

$$2x + 2 = x + 7.$$

Faisons passer les termes en x dans le premier membre, les termes connus dans le second, il vient

$$2x - x = 7 - 2 \quad \text{ou} \quad x = 5,$$

ce qu'il est facile de vérifier.

III. — DES ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ A UNE INCONNUE.

Toute équation du premier degré à une inconnue peut être ramenée à la forme

$$(1) \qquad Ax = B,$$

A et B étant deux quantités indépendantes de x; pour cela il suffit de faire passer dans le premier membre les termes qui contiennent l'inconnue, et dans le second ceux qui ne la contiennent pas.

On résout immédiatement l'équation (1) en divisant les deux membres par A, ce qui donne

$$x = \frac{B}{A},$$

et l'équation (1) n'a pas d'autre solution.

On peut donc dire que *toute équation du premier degré à une inconnue a toujours une solution et une seule.*

Si B était égal à zéro, il est clair que l'on aurait $x = 0$. Quelques auteurs examinent le cas où $A = 0$, mais alors, dans l'équation, x n'existe plus, l'équation n'est plus du premier degré; elle se réduit à une égalité absurde $0 = B$, ou à une identité si l'on a $B = 0$. On peut être conduit à de semblables résultats en cherchant à résoudre certaines équations absurdes ou certaines identités que l'on pose comme équations.

Par exemple, quel que soit x, nous avons vu que l'on avait

$$(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1;$$

si l'on regarde actuellement cette identité comme une équation, on trouve

$$x^2 + 2x + 1 = x^2 + 2x + 1,$$

ou, faisant passer les termes inconnus dans le premier membre, les termes connus dans le second,

$$0 \times x^2 + 0 \times x = 0,$$

ce qui est une identité. Cela tient à ce que l'on est parti d'une identité, ou, si l'on veut, d'une équation satisfaite quel que soit x; si, au contraire, on avait posé

$$(2) \qquad (x+1)^2 = x^2 + 2x,$$

on aurait trouvé

$$0 \times x^2 + 0 \times x = -1,$$

résultat absurde et qui prouve que l'équation (2) n'a pas de racines. Et, en effet, comme $(x+1)^2$ est égal à $x^2 + 2x + 1$, il est impossible qu'il soit égal à $x^2 + 2x$, c'est-à-dire au même nombre diminué de 1.

Si l'on écarte donc le cas où $A = 0$, c'est-à-dire où la formule (1) n'est pas une équation, on peut dire que *toute équation du premier degré à une inconnue admet une racine et une seule.*

IV. — DES ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ A PLUSIEURS INCONNUES.

Une seule équation à plusieurs inconnues suffit très-rarement à la détermination de ces inconnues. En effet, si l'on donne à toutes les inconnues, sauf une, des valeurs arbitraires, on peut en général résoudre, par rapport à l'inconnue restante, l'équation en question, ce qui montre que l'on peut ainsi trouver autant de solutions que l'on veut.

Bien qu'il n'en soit pas toujours ainsi, nous verrons qu'un système de n équations du premier degré à n inconnues admet ordinairement une solution et une seule.

Toutes les fois qu'il n'en admet pas, on dit que le système est *incompatible;* toutes les fois qu'il en admet deux ou plus, on dit qu'il est *indéterminé*.

Puisqu'un système de n équations à n inconnues admet ordinairement une solution, un système de $n-1$ équations, ou moins, à n inconnues, doit être insuffisant, puisque l'on peut choisir au moins une inconnue arbitrairement, et qu'il reste alors assez d'équations pour trouver les valeurs des inconnues restantes.

De même, un système de $n+1$ équations, ou plus, à n inconnues, ne peut pas en général être résolu, car, n quelconques d'entre elles admettant une solution et une seule, cette solution ne conviendra pas toujours à un autre système formé de n des équations données.

Lorsqu'un système d'équations du premier degré admet deux solutions, il en admet un nombre illimité, et c'est ce qui fait dire qu'il est indéterminé.

En effet, considérons le système

$$
\begin{aligned}
&a_1 x + b_1 y + c_1 z + \ldots = k_1,\\
&a_2 x + b_2 y + c_2 z + \ldots = k_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&a_n x + b_n y + c_n z + \ldots = k_n,
\end{aligned}
$$

où $x, y, z, \ldots$ sont n inconnues et où les autres lettres désignent des quantités connues. Soient

$$x = \alpha, \quad y = \beta, \quad \ldots$$

un premier système de solutions,

$$x = \alpha', \quad y = \beta', \quad \ldots$$

un second système de solutions; on aura

$$
\begin{aligned}
&a_1 \alpha + b_1 \beta + \ldots = k_1,\\
&a_1 \alpha' + b_1 \beta' + \ldots = k_1;
\end{aligned}
$$

soient μ et μ' deux nombres tels, que $\mu + \mu' = 1$; multiplions la première de ces formules par μ, la seconde par μ', et ajoutons; nous aurons

$$a_1(\alpha\mu + \alpha'\mu') + b_1(\beta\mu + \beta'\mu') + \ldots = k_1(\mu + \mu') = k.$$

On voit que

$$\alpha\mu + \alpha'\mu', \quad \beta\mu + \beta'\mu', \quad \ldots$$

constituera une nouvelle solution, et, comme μ est arbitraire, on voit que le nombre des solutions du système est illimité.

Éliminer une inconnue entre plusieurs équations, c'est remplacer ces équations par d'autres qui ne contiennent plus cette inconnue, et qui cependant admettent les mêmes solutions pour les inconnues restantes. Nous allons exposer diverses méthodes d'élimination.

1° *Élimination par substitution.* — L'élimination par substitution consiste à résoudre l'une des équations par rapport à l'une des inconnues et à porter la valeur trouvée dans les autres équations, qui alors ne contiennent plus cette inconnue. Voici un exemple de cette méthode. Considérons les équations

$$(1) \qquad 3x + 8y = 25,$$

$$(2) \qquad 12x - 7y = 22.$$

Tirons de (1) la valeur de x, en supposant y connu; il vient

$$(3) \qquad x = \frac{25 - 8y}{3},$$

et l'équation (3), en vertu des principes exposés (p. 75), peut remplacer l'équation (1). Si alors on remplace x par $\frac{25 - 8y}{3}$ dans l'équation (2), on trouve une équation qui

ne contient plus y et qui peut remplacer l'équation (2) ou l'équation (3), c'est-à-dire l'équation (1). En effet, remplacer x dans l'équation (2) par sa valeur tirée de l'équation (3) revient à écrire l'équation (3) d'abord sous la forme

$$x - \frac{25 - 8y}{3} = 0,$$

puis à multiplier par 12 ses deux membres et à la retrancher de l'équation (2). La méthode de substitution n'altère donc pas les racines et peut être employée dans tous les cas; le calcul s'achève facilement et l'équation (2) devient, après la *substitution* de la valeur de x tirée de l'équation (3),

$$(4) \qquad 12\frac{25 - 8y}{3} - 7y = 22;$$

d'où l'on tire, en résolvant cette équation à une inconnue par rapport à y,

$$(5) \qquad y = 2.$$

L'équation (5), qui admet les mêmes racines que l'équation (4), peut remplacer les équations (1) ou (2); si alors on porte la valeur obtenue pour y dans l'une de ces équations, on élimine y et l'on trouve une équation à une inconnue en x qui permet de calculer la valeur de cette inconnue. Si l'on fait $y = 2$ dans l'équation (1), on trouve

$$3x + 16 = 25, \quad x = 3.$$

Remarque. — La méthode que nous venons d'employer s'applique à un nombre quelconque d'équations et réduit le système total des équations à un nombre moindre d'une unité et ayant une inconnue de moins. On peut alors procéder sur le nouveau système comme sur le premier et faire

disparaître une inconnue et une équation; on arrive alors finalement à une seule équation contenant une seule inconnue, si le nombre des équations est égal à celui des inconnues, et l'on peut en tirer la valeur de cette inconnue. Si le nombre des équations est supérieur à celui des inconnues, on a plusieurs équations contenant une même inconnue; ces équations ne fournissent pas en général la même valeur pour cette inconnue, et l'on conçoit que le système d'équations est surabondant. Si au contraire le nombre des inconnues est supérieur à celui des équations, on tombe sur une équation à plusieurs inconnues, et l'on voit que l'on peut choisir arbitrairement l'une d'elles : le système a une infinité de solutions.

Ce raisonnement est très-vague, en ce sens qu'il suppose que les équations à une inconnue que l'on est censé résoudre ont une solution bien déterminée; aussi verrons-nous les conclusions précédentes, qui tendent à établir qu'un système de n équations doit contenir n inconnues, tomber en défaut.

2° *Élimination par addition.* — Cette méthode consiste à multiplier par des facteurs convenables deux des équations à résoudre, de telle sorte que les coefficients de la même inconnue soient égaux. S'ils sont de même signe, on retranche les équations membre à membre; s'ils sont de signes contraires, on ajoute ces équations, et l'on fait ainsi évidemment disparaître une inconnue. L'équation à laquelle on arrive peut, en vertu des principes démontrés plus haut (p. 75), remplacer l'une quelconque des équations qui lui ont donné naissance.

Reprenons les équations considérées tout à l'heure

$$(1) \qquad 3x + 8y = 25,$$

$$(2) \qquad 12x - 7y = 22.$$

Pour donner des valeurs égales aux coefficients de x, on

peut multiplier la première équation par le coefficient de x dans la seconde, et *vice versa;* mais il est plus simple de multiplier par 4 les deux membres de l'équation (1); en retranchant alors membre à membre, on trouve

$$39y = 78, \quad y = 2.$$

3° *Élimination par comparaison.* — Cette méthode, peu usitée, revient au fond à la précédente; elle consiste à égaler les valeurs d'une même inconnue tirée de deux équations différentes.

4° *Élimination par la méthode des multiplicateurs.* — Cette méthode, attribuée à Bezout, consiste à multiplier les équations par des facteurs tels, qu'en les ajoutant toutes les inconnues disparaissent à l'exception d'une seule.

Considérons d'abord les équations

$$(1) \qquad ax + by = c,$$

$$(2) \qquad a'x + b'y = c'.$$

Multiplions la seconde équation par λ, ajoutons avec la première, il vient

$$(a + a'\lambda)x + (b + b'\lambda)y = c + c'\lambda.$$

Déterminons maintenant λ par la condition

$$a + a'\lambda = 0,$$

d'où

$$\lambda = -\frac{a}{a'},$$

l'équation (3) devient

$$\left(b - \frac{ab'}{a'}\right)y = c - \frac{ac'}{a'};$$

d'où l'on tire

$$y = \frac{a'c - c'a}{a'b - b'a}.$$

En posant dans l'équation (3)

$$b + b'\lambda = 0 \quad \text{ou} \quad \lambda = -\frac{b}{b'},$$

on aurait trouvé

$$x = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'}.$$

Considérons en second lieu les équations

$$(1) \qquad ax + by + cz = d,$$

$$(2) \qquad a'x + b'y + c'z = d',$$

$$(3) \qquad a''x + b''y + c''z = d''.$$

Multiplions la seconde par le facteur indéterminé λ, la troisième par λ', et ajoutons; il vient

$$(4) \quad \begin{cases} (a + a'\lambda + a''\lambda')x + (b + b'\lambda + b''\lambda')y \\ \qquad + (c + c'\lambda + c''\lambda') = d + d'\lambda + d''\lambda'. \end{cases}$$

Profitons de l'indétermination de λ et λ' et posons

$$(5) \qquad b + b'\lambda + b''\lambda' = 0,$$

$$(6) \qquad c + c'\lambda + c''\lambda' = 0.$$

Multiplions l'équation (6) par μ et ajoutons avec l'équation (5); il vient

$$(7) \qquad b + c\mu + (b' + c'\mu)\lambda + (b'' + c''\mu)\lambda' = 0.$$

Posons enfin

$$b' + c'\mu = 0 \quad \text{ou} \quad \mu = -\frac{b'}{c'};$$

l'équation (7) donne

$$b - \frac{b'}{c'}c + \left(b'' - \frac{b'}{c'}c''\right)\lambda' = 0,$$

d'où

$$\lambda' = \frac{cb' - bc'}{c'b'' - b'c''}.$$

Si l'on se reporte aux équations (5) et (6), on voit que, pour en déduire λ quand on connaît λ', il suffit de changer, dans la formule qui donne λ', b' en b'', b'' en b', c' en c'' et c'' en c', car, quand on opère ce changement dans les équations (5) et (6), il est bien clair que la valeur de λ' qui satisfait est l'ancienne valeur de λ, et *vice versâ*. On a donc

$$\lambda = \frac{cb'' - bc''}{c''b' - b''c'}.$$

Si l'on porte alors dans l'équation (4) les valeurs que nous venons de trouver pour λ et λ', il vient, en vertu des équations (4) et (5),

$$\left(a + a'\frac{cb'' - bc''}{c''b' - b''c'} + a''\frac{cb' - bc'}{c'b'' - b'c''}\right)x$$
$$= d + d'\frac{cb'' - bc''}{c''b' - b''c'} + d''\frac{cb' - bc'}{c'b'' - b'c''},$$

d'où l'on tire, en ordonnant par rapport aux accents,

$$x = \frac{db'c'' - dc'b'' + cd'b'' - bd'c'' + cb'd'' - bc'd''}{ab'c'' - ac'b'' + ca'b'' - ba'c'' + cb'a'' - bc'a''}.$$

Pour déduire de cette formule la valeur de y, il suffit de changer a en b, b en c et c en a. En effet, par ce changement, les équations (1), (2), (3) fourniront pour y la valeur qu'elles fournissaient avant pour x, et pour z la valeur qu'elles fournissaient pour y. Enfin on pourrait aussi se contenter de changer a en b et b en a.

Ce qui est remarquable, c'est que par ces changements le dénominateur de la valeur de x ne change pas, en sorte que les trois inconnues ont le même dénominateur. Le numérateur d'une inconnue ne diffère du dénominateur que par le changement en d de la lettre qui sert de coefficient à cette inconnue dans les équations (1), (2), (3); nous généraliserons plus loin ces résultats.

V. — DISCUSSION DES CAS QUI PEUVENT SE PRÉSENTER DANS LA RÉSOLUTION D'UN SYSTÈME DE DEUX ÉQUATIONS A DEUX INCONNUES.

Reprenons les équations dont il a déjà été question,

$$(1)\qquad ax + by = c,$$

$$(2)\qquad a'x + b'y = c'.$$

Ces équations renferment toutes les équations numériques à deux inconnues et du premier degré que l'on pourrait se proposer de résoudre; il suffit pour cela d'attribuer à a, b, a', b', c et c' des valeurs convenables, nulles au besoin.

Multiplions par b' la première équation et par b la seconde; en retranchant alors membre à membre, il vient

$$(3)\qquad (ab' - ba')x = cb' - bc'.$$

Jusqu'ici nous avons implicitement supposé que b et b' n'étaient pas nuls à la fois; sans quoi nous aurions fait une opération illusoire conduisant à l'identité

$$0 = 0.$$

Nous allons supposer $ab' - ba'$ différent de zéro, et alors l'équation (3) donnera

$$(4)\qquad x = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'}.$$

On trouverait de même, en supposant que a et a' ne sont pas nuls à la fois,

$$(5)\qquad y = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'}.$$

Ces formules montrent que, si $ab' - ba'$ est différent de

zéro, le système des équations (1) et (2) admet toujours une solution et une seule; car les hypothèses que nous avons faites, que a et a' ne sont pas nuls à la fois ou que b et b' ne sont pas nuls à la fois, rentrent dans celle-ci

$$ab' - ba' \gtrless 0.$$

Supposons actuellement

$$ab' - ba' = 0, \tag{6}$$

et toutes les quantités a, a', b, b', c, c' différentes de zéro; alors les valeurs de x et de y se présentent en général sous la forme

$$\frac{m}{0}.$$

Si l'on remonte à l'équation (3), qui a fourni cette valeur de x, on voit que cette équation se réduit à une absurdité, puisque son premier membre est nul et que le second ne l'est pas en général. Les équations (1) et (2), conduisant par des calculs légitimes à une absurdité, sont incompatibles; c'est du reste ce qu'il est facile d'établir directement.

1° Nous supposerons le numérateur de la valeur de x, c'est-à-dire le second membre de la formule (3), différent de zéro; nous aurons alors

$$cb' - bc' \gtrless 0. \tag{7}$$

Mais de la formule (6) on tire

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}, \tag{8}$$

et de la formule (7)

$$\frac{b}{b'} \gtrless \frac{c}{c'}, \tag{9}$$

et, par conséquent, de ces deux dernières formules,

$$(10 \qquad \frac{a}{a'} \gtrless \frac{c}{c'}$$

ou

$$ac' - ca' \gtrless 0.$$

Cette quantité est précisément le numérateur de la valeur de y, qui va se présenter aussi sous la forme $\frac{m}{0}$. Si l'on désigne alors par p la valeur commune des rapports $\frac{a}{a'}$, $\frac{b}{b'}$, on tirera de la formule (8)

$$a = pa', \quad b = pb',$$

et de la formule (9)

$$c \lessgtr pc'.$$

En portant dans l'équation (1) les valeurs que nous venons de trouver pour a et b, on trouve

$$pa'x + pb'y = c \lessgtr pc'.$$

Mais l'équation (2) multipliée par p donne

$$pa'x + pb'y = pc'.$$

On voit donc que les équations (1) et (2) impliquent des conditions contradictoires, puisqu'elles exigent que la même quantité soit à la fois égale et inégale à pc'.

2° Il pourrait arriver que le numérateur de la valeur de x fût égal à zéro; l'équation (3) ne présenterait plus rien d'absurde; au contraire, elle se réduirait à l'identité

$$0 = 0.$$

La valeur de x prend la forme $\frac{0}{0}$; il est facile de voir que dans ce cas les équations (1) et (2) rentrent l'une dans

l'autre et que les valeurs de x et de y sont indéterminées; nous supposerons toujours les coefficients a, b, c, a', b', c' différents de zéro, et la relation

$$(6) \qquad ab' - ba' = 0$$

fournira comme plus haut

$$(8) \qquad \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}.$$

Si nous supposons actuellement le numérateur de la valeur de x nul, ou

$$(11) \qquad cb' - bc' = 0,$$

il vient

$$(12) \qquad \frac{c}{c'} = \frac{b}{b'};$$

et, en vertu de l'équation (8),

$$\frac{a}{a'} = \frac{c}{c'}$$

ou bien

$$ac' - ca' = 0,$$

et l'on voit que le numérateur de la valeur de y est également nul. Si l'on désigne par p la valeur commune des rapports $\frac{a}{a'}$, $\frac{b}{b'}$, $\frac{c}{c'}$, les équations (11) et (12) donnent

$$a = pa', \quad b = pb', \quad c = pc'.$$

Si l'on porte ces valeurs de a, b, c dans l'équation (1), on trouve

$$pa'x + pb'y = pc',$$

équation que l'on déduit en multipliant par p l'équation (2). On voit qu'en réalité on n'a qu'une seule équa-

tion entre x et y, ce qui est insuffisant pour déterminer ces inconnues, puisque alors on peut choisir l'une d'elles arbitrairement.

Il reste maintenant à examiner les cas où quelques coefficients des équations (1) et (2) seraient nuls; mais, auparavant, observons que les formules (4) et (5), qui font connaître x et y, satisfont aux équations (1) et (2) toutes les fois que $ab' - ba'$ n'est pas nul. Nous supposerons donc

$$(6) \qquad ab' - ba' = 0.$$

1° Si aucun des coefficients a, b, a', b' n'est nul, on tire de cette équation, comme nous avons vu plus haut,

$$a = pa', \quad b = pb',$$

et, si c seul est nul, on voit que les équations (1) et (2) sont incompatibles, et les inconnues se présentent sous la forme $\frac{m}{0}$. Si c et c' sont nuls tous deux, les équations (1) et (2) rentrent l'une dans l'autre, et les inconnues se présentent sous la forme $\frac{0}{0}$.

2° Supposons $a = 0$; alors l'équation (6) montre que a' ou b doit être nul; si a' est nul, on n'a plus, à proprement parler, deux inconnues dans les équations (1) et (2), qui ne peuvent déterminer x et qui sont surabondantes pour déterminer y, à moins que ces deux équations ne soient une conséquence l'une de l'autre. Dans ce cas, les formules (4) et (5) donnent des résultats de la forme

$$x = \frac{m}{0}, \quad y = \frac{0}{0}.$$

Dans le cas où $cb' - bc' = 0$, x se présente aussi sous la forme $\frac{0}{0}$. Cependant, dans ce cas, la valeur de y est par-

faitement déterminée, puisque $\frac{c}{c'}$ est égal à $\frac{b}{b'}$; les équations (1) et (2) rentrent l'une dans l'autre et sont à une seule inconnue. La formule illusoire

$$y = \frac{0}{0},$$

à laquelle on arrive, tient à ce que l'équation (5) a été obtenue en multipliant par a' et a les équations (1) et (2). Or a et a' sont nuls; on a donc fait des calculs illusoires.

Si l'on supposait $b = 0$ avec $a = 0$, l'équation (1) se réduirait à l'absurdité $c = 0$, à moins que c ne fût naturellement nul. Lorsque c est différent de zéro, les équations (4) et (5) donnent

$$x = \frac{m}{0}, \quad y = \frac{m}{0};$$

lorsque c est nul, on a au contraire

$$x = \frac{0}{0}, \quad y = \frac{0}{0}.$$

3° Supposons $a = 0$ avec $a' = 0$ et $b' = 0$. Dans ce cas, les équations (1) et (2) se réduisent à une absurdité, à moins que $c' = 0$, et à une équation à une inconnue

$$by = c.$$

Les formules (4) et (5) donnent, dans ce cas,

$$x = \begin{cases} \frac{m}{0} \text{ pour } c' \gtrless 0, \ c \gtrless 0, \\ \frac{0}{0} \text{ pour } c' = 0 \text{ ou } c = 0, \end{cases}$$

$$y = \frac{0}{0}.$$

4° Si l'on a $a = 0$, $a' = 0$, $b = 0$, $b' = 0$, les équations (1) et (2) sont absurdes ou illusoires et les formules (4) et (5) donnent

$$x = \frac{0}{0}, \quad y = \frac{0}{0}.$$

De cette discussion résulte que, si l'on a réellement deux équations à deux inconnues ne présentant rien de contradictoire et ne rentrant pas l'une dans l'autre, les formules (4) et (5) pourront servir à résoudre le système (1) et (2). Nous avons, en effet, examiné tous les cas possibles, à savoir :

I. $ab' - ba' \lessgtr 0$.

II. $ab' - ba' = 0$.

1° Aucun des coefficients a, b, a', b' n'est nul.

2° Un coefficient d'inconnue nul comprenant l'un des deux suivants :

a. Deux coefficients appartenant à la même inconnue nuls.

b. Deux coefficients n'appartenant pas à la même inconnue nuls.

3° Trois coefficients nuls.

4° Quatre coefficients nuls.

Dans chacun de ces cas, nous avons supposé c et c' nuls ou différents de zéro, et toujours la condition $ab' - ba' = 0$ nous a conduit à affirmer que les équations (1) et (2) étaient incompatibles ou insuffisantes.

VII. — DES PROBLÈMES D'ALGÈBRE QUI CONDUISENT A DES ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ.

Pour résoudre un problème dans lequel le résultat cherché est un nombre ou même se compose de plusieurs nombres, on désigne les inconnues, c'est-à-dire les quantités à déterminer, par des lettres ; puis on suppose les

résultats connus et l'on indique, à l'aide des signes algébriques, les calculs qu'il faudrait effectuer sur les lettres qui désignent les inconnues pour vérifier qu'elles sont bien les solutions du problème : on arrive ainsi à des équations que l'on essaye de résoudre. Lorsque ces équations peuvent être résolues, les solutions que l'on en déduit sont ordinairement celles du problème que l'on a mis en équation : je dis *ordinairement,* parce qu'il arrive quelquefois que les équations auxquelles on est conduit fournissent non-seulement la solution cherchée, mais encore des solutions étrangères à la question que l'on traite. Nous ne pouvons pas à présent donner la raison de cette anomalie, sur laquelle nous aurons bien souvent l'occasion de revenir. Donnons quelques exemples.

Problème I. — *La somme de deux nombres est* 18, *leur différence est* 6 : *trouver ces deux nombres.*

Soit x le plus petit des deux nombres ; le plus grand sera $x+6$, puisque leur différence est 6, et, comme leur somme fait 18, on doit avoir

$$x+x+6=18,$$

d'où l'on tire

$$x=6.$$

Ainsi le plus petit des deux nombres est 6, le plus grand est donc 12.

Problème II. — *Dans quel système de numération le nombre* 15 *est-il représenté par* 23 ?

Ici l'inconnue est la base ; désignons-la par x. Le nombre total des unités contenues dans 23 est de deux fois la base augmentée de 3. On a donc

$$2x+3=15,$$

d'où l'on tire

$$x = 6.$$

Ainsi la base du système cherché est 6.

Problème III. — *Un marchand vend en deux jours* 600 *oranges et reçoit en tout* 40 *francs, à savoir* 20 *francs par jour; mais le second jour il vend ses oranges deux fois meilleur marché que le premier : on demande à quel prix il a vendu ses oranges et combien il en a vendu chaque jour.*

Soit x le nombre des oranges vendues le premier jour; le prix de ces x oranges est de 20 francs; donc le prix d'une orange est $\frac{20}{x}$ pour le premier jour.

Le second jour, il vend le reste de ses oranges, c'est-à-dire $600 - x$ pour 20 francs; donc le prix d'une orange est alors $\frac{20}{600 - x}$; mais, comme elles sont deux fois meilleur marché que le premier jour, on doit avoir

$$\frac{20}{x} = 2 \times \frac{20}{600 - x}.$$

En multipliant par $\frac{x(600 - x)}{20}$ les deux membres de cette équation, on risque d'y introduire les solutions $x = 0$ ou $x = 600$; mais il n'en est rien. En effet on trouve

$$600 - x = 2x$$

ou

$$x = 200.$$

Ainsi, le premier jour, il a été vendu 200 oranges; par conséquent, on en a vendu 400 le second jour. Le premier jour, le prix d'une orange était $0^{fr},10$; le second jour, il était $0^{fr},05$.

PROBLÈME IV. — *Deux joueurs ont gagné* 6000 *francs à eux deux en deux parties; après la première partie, le gain du premier joueur est triple de celui du second; le premier donne alors* 1000 *francs au second; après la seconde partie, le premier joueur a gagné deux fois plus que le second, mais il lui donne encore la moitié de son gain, après quoi ils se trouvent chacun en possession de* 3000 *francs: on demande quel a été le gain de chaque joueur à la fin de chaque partie.*

Soit x le gain du second joueur après la première partie, le gain du premier sera $3x$; soit y le gain du second joueur à la fin de la seconde partie, le gain du premier sera $2y$. Or le gain total des joueurs fait 6000 francs; on a donc

$$(1) \qquad x + 3x + y + 2y = 6000.$$

Mais à la fin de la première partie le second joueur possède $x + 1000$, puisqu'il a reçu 1000 francs; à la fin de la seconde partie, il possède d'abord $x + 1000$, plus son gain y, plus la moitié y du gain du premier; il a donc en tout

$$(2) \qquad x + 1000 + y + y = 3000.$$

Les équations (1) et (2) peuvent s'écrire

$$4x + 3y = 6000,$$
$$x + 2y = 2000;$$

on tire de ces équations

$$y = 400, \quad x = 1200.$$

Ainsi le gain du premier joueur est de $3x$ ou 3600 francs après la première partie, et de $2y$ ou 800 francs après la

seconde; le gain du second est de 1200 francs après la première partie et de 400 francs après la seconde.

Problème V. — *Un nombre se compose de trois chiffres; la somme de ses chiffres est* 11; *le dernier chiffre est double du second diminué du premier et de* 1; *enfin, en ajoutant* 198 *à ce nombre, on retrouve le nombre renversé : quel est ce nombre?*

Soient x le chiffre des unités, y celui des dizaines, z celui des centaines; la somme des chiffres étant 11, on a

$$z+y+x=11; \tag{1}$$

le dernier chiffre étant double du second diminué du premier et de 1, on a

$$x=2(y-z-1). \tag{2}$$

Enfin le nombre lui-même est $100z+10y+x$; en lui ajoutant 198, on doit trouver le nombre renversé, c'est-à-dire $100z+10y+z$. On a donc

$$100z+10y+x+198=100x+10y+z. \tag{3}$$

Les équations (1), (2), (3) peuvent s'écrire ainsi :

$$x+y+z=11, \tag{4}$$

$$x-2y+2z=-2, \tag{5}$$

$$99x-99z=198. \tag{6}$$

L'équation (6) donne immédiatement

$$x-z=2. \tag{7}$$

En multipliant l'équation (4) par 2 et en l'ajoutant avec l'équation (5), on trouve

$$3x+4z=20. \tag{8}$$

Des équations (7) et (8) on tire

$$x = 4, \quad z = 2,$$

et l'équation (4) donne alors $y = 5$; ainsi le nombre cherché est 254.

VIII. — INTERPRÉTATION DES SOLUTIONS NÉGATIVES.

Il peut arriver que les racines d'une équation ou d'un système d'équations soient négatives : si le résultat demandé dans le problème dont ces équations sont la traduction est une quantité algébrique, le problème ne présente rien d'absurde ; mais, si le résultat cherché est un nombre concret, le problème que l'on a mis en équation n'admet pas de solution. Il pourrait même arriver que le problème fût impossible, quoique les équations du problème fussent des nombres positifs : c'est ce qui arriverait, par exemple, si les solutions du problème que l'on veut résoudre devaient être des nombres entiers ou des nombres compris entre des limites données.

Mais nous nous attacherons surtout à la discussion des solutions négatives, parce qu'elles donnent lieu à une théorie qui exerce une influence capitale sur toutes les branches des Mathématiques.

Commençons par essayer de résoudre le problème suivant :

Un père a 68 ans, son fils en a 40 : on demande au bout de combien de temps l'âge du père sera le double de celui du fils.

Désignons par x ce temps ; au bout du temps x, le père aura $68 + x$ années, le fils $40 + x$, et l'on doit avoir

$$(1) \qquad 68 + x = 2(40 + x);$$

en résolvant cette équation, on trouve

$$(2) \qquad x = -12.$$

Ce résultat prouve que l'équation (1), qui est la traduction du problème en langage algébrique, n'admet pas de solution positive ; en d'autres termes, le problème n'admet pas de solution. Et en effet, l'âge du père n'étant pas le double de l'âge du fils, il ne le deviendra jamais, et le rapport des deux âges se rapproche toujours de 1.

La solution négative $x = -12$ n'est cependant pas aussi absurde que l'on pourrait croire au premier abord. En effet, changeons x en $-x'$; x' sera égal à 12, et l'équation (1) deviendra

$$(3) \qquad 68 - x' = 2(40 - x'),$$

et cette dernière équation admet évidemment pour solution $x' = 12$. L'équation (3) est la traduction algébrique du problème suivant :

Un père a 68 ans, son fils en a 40 : à quelle époque l'âge du père a-t-il été le double de celui du fils?

Nous trouvons alors pour réponse : il y a 12 ans.

En général, toutes les fois que l'on trouve une solution négative à un problème, il faut changer le signe de la lettre qui représente l'inconnue dans l'équation à laquelle conduit le problème ; la solution négative devient alors positive, et, est le plus souvent la réponse d'un problème analogue à celui qui a été posé, et dont l'équation modifiée est la traduction algébrique.

Observons qu'à l'aide d'une simple convention deux problèmes peuvent être compris sous le même énoncé. Reprenons le problème de tout à l'heure ; posons-le en ces termes :

Un père a 68 ans, son fils en a 40 : quand l'âge du père sera-t-il ou a-t-il été le double de celui du fils?

Ainsi posé, le problème est en quelque sorte double; mais si nous convenons de regarder comme positif le temps à venir, comme négatif le temps passé, si nous convenons, en un mot, que les locutions *dans* — N *années* et *il y a* N *années* soient équivalentes, nous raisonnerons ainsi qu'il suit : soit x le temps positif ou négatif au bout duquel l'âge du père sera le double de celui du fils.

Au bout du temps x, le père aura $68+x$ années; ceci est évident si l'âge du père devient dans l'avenir double de celui du fils. Dans le cas où l'âge du père a été le double de celui du fils, $68+x$ représente encore l'âge du père lorsqu'il est le double de celui du fils, car, x' désignant la valeur absolue de x, cet âge est $68-x'$, c'est-à-dire $68+x$. De même, à l'époque cherchée, l'âge du fils est $40+x$; or on doit avoir

$$68+x=(40+x)\times 2.$$

Comme on trouve $x=-12$, on en conclut que l'âge du père *a été*, il y a douze ans, double de celui du fils.

En Algèbre, lorsqu'une quantité variable peut être comptée dans deux sens opposés, comme le temps dans le présent ou dans l'avenir; les longueurs sur une même ligne à partir d'un point fixe; la fortune d'un négociant qui peut être active ou passive, etc., on convient de regarder comme positives les grandeurs comptées dans un sens et comme négatives les grandeurs comptées dans l'autre; l'avantage que l'on retire de cette convention est de comprendre sous un seul énoncé plusieurs questions du même genre.

PROBLÈME DES COURRIERS. — *Deux mobiles* A *et* B *partent*

simultanément de deux points P *et* Q *et cheminent sur la droite* PQ, *le premier parcourant* a *mètres par seconde, le second* b *mètres par seconde; la distance* PQ *est de* l *mètres : on demande à quelle époque leur rencontre a lieu.*

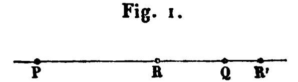
Convenons de regarder comme positives les distances parcourues dans le sens PQ et comme négatives les distances parcourues dans le sens QP; convenons de regarder les temps passés comme négatifs, les temps à venir comme positifs.

Soit x la distance à laquelle la rencontre a lieu, comptée à partir du point P, le sens positif étant toujours PQ ; nous désignerons par R le point de rencontre ; la distance PR est égale en valeur absolue au temps employé à la parcourir, que nous désignerons par t multiplié par a, en sorte qu'en valeur absolue on a

$$x = at. \tag{1}$$

Voyons si cette égalité a encore lieu quand on a égard aux signes. 1° Supposons a et t positifs. Si a est positif, le point A se meut de P vers Q; si t est positif, la rencontre *aura lieu*. Donc le point R est placé du côté de Q par rapport au point P, comme dans la *fig.* 1; par conséquent x est positif, et par conséquent la formule (1) est

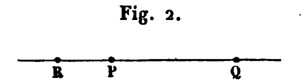
Fig. 1.



exacte. 2° Si a est positif, mais t négatif, le point A se meut dans le sens PQ, mais la rencontre *a eu lieu*. Le point R, cette fois, se trouve du côté opposé à Q par rapport à P, comme dans la *fig.* 2; alors x est négatif, at est négatif aussi; donc la formule (1) convient encore à ce cas.

3° Si a est négatif et t positif, la rencontre *aura lieu*, mais le point A se meut dans le sens QP, en sorte que R se trouve encore placé comme dans la *fig.* 2, et x est négatif ainsi que at. La formule (1) convient encore à ce

Fig. 2.



cas. 4° Si a et t sont négatifs tous deux, la rencontre *a eu lieu*, et, comme le point A se meut dans le sens QP, le point R se trouve placé comme dans la *fig.* 1; x est donc positif comme at, et la formule (1) est encore exacte dans ce cas.

Si nous désignons par y la distance parcourue par le point B entre Q et R, une discussion analogue à la précédente fournit l'équation

$$(2) \qquad y = bt.$$

Cela posé, je dis que l'on a

$$(3) \qquad x - y = l.$$

Cette équation est évidente si x et y sont positifs tous deux, car alors le point de rencontre se trouve placé comme le point R′ de la *fig.* 1, et l'on a

$$PR' - QR' = PQ$$

ou

$$x - y = l.$$

Mais, si la rencontre a lieu entre P et Q au point R de la *fig.* 1, on a

$$PR + RQ = PQ.$$

Mais $PR = x$, $RQ = -y$, puisque y est négatif, et $PQ = l$; on a donc

$$x - y = l.$$

Enfin, si le point de rencontre se trouve placé comme le point R de la *fig.* 2, on a

$$QR - PR = PQ.$$

Ici on a

$$QR = -y, \quad PR = -x, \quad \text{et} \quad PQ = l;$$

donc

$$x - y = l;$$

la formule (3) peut donc être considérée comme parfaitement établie. Pour résoudre le système des équations (1), (2), (3), il suffit de retrancher l'équation (2) de l'équation (1); il vient alors

$$x - y = (a - b)t,$$

et, en comparant avec l'équation (3),

$$l = (a - b)t,$$

d'où

$$(4) \qquad t = \frac{l}{a - b}.$$

Les équations (1) et (2) donnent alors

$$x = \frac{al}{a - b}, \quad y = \frac{bl}{a - b}.$$

Proposons-nous de résoudre la question suivante :

Deux mobiles partent simultanément de deux points P *et* Q; *ils marchent à la rencontre l'un de l'autre. Le premier parcourt* 10 *mètres par seconde, le second* 40 *mètres; la distance* PQ *est de* 1250 *mètres : au bout de combien de temps se rencontreront-ils?*

Pour trouver ce temps, il suffit de faire dans la for-

mule (4) l égal à 1250, a égal à 10 et b égal à -40; on trouve ainsi

$$t = \frac{1250}{10 + 40} = 25.$$

Bien que le problème des courriers soit éminemment propre à mettre en évidence les avantages que l'on tire de l'interprétation des quantités négatives, nous allons encore traiter une question d'Arithmétique d'une grande importance et qui se trouve considérablement simplifiée par les théories précédemment exposées : je veux parler de l'étude des erreurs relatives.

IX. — THÉORIE DES ERREURS RELATIVES.

Lorsque l'on ne peut pas calculer exactement un nombre, on cherche à en approcher; la différence entre le nombre exact et le nombre approché porte le nom d'*erreur absolue*. Cette erreur peut être par *excès* ou par *défaut,* selon que le nombre approché est plus grand ou plus petit que le nombre exact. Nous regarderons comme positives les erreurs par excès et comme négatives les erreurs par défaut, en sorte que, A étant le nombre exact, a le nombre approché, l'erreur sera toujours en grandeur et en signe $a - A$.

On appelle *erreur relative* l'erreur absolue divisée par le nombre exact.

THÉORÈME I. — *L'erreur relative d'un produit de deux facteurs est égale à la somme des erreurs relatives de ses facteurs augmentée du produit des mêmes erreurs.*

En effet, soient A et B les facteurs exacts du produit, α et β les erreurs absolues de ces mêmes facteurs; les

nombres approchés a et b seront donnés par les formules

$$a = A + \alpha,$$
$$b = B + \beta.$$

Quels que soient les signes de α et β, on déduit des égalités précédentes

$$ab = AB + A\beta + B\alpha + \alpha\beta.$$

En retranchant AB aux deux membres de cette équation et en divisant par AB, on a

$$\frac{ab - AB}{AB} = \frac{\beta}{B} + \frac{\alpha}{A} + \frac{\alpha\beta}{AB}.$$

Si l'on observe que $ab - AB$ est en grandeur et en signe l'erreur absolue du produit, $\frac{ab - AB}{AB}$ désignera son erreur relative, $\frac{\alpha}{A}$, $\frac{\beta}{B}$ seront les erreurs relatives de ses facteurs, et l'égalité précédente démontre le théorème énoncé.

On voit encore dans cet exemple combien l'usage des quantités négatives simplifie l'énoncé des théorèmes et leur démonstration.

Théorème II. — *L'erreur relative d'un quotient est sensiblement égale à la différence des erreurs relatives du dividende et du diviseur.*

Soient D le dividende exact, d l'erreur; Δ le diviseur exact, δ l'erreur; Q le quotient exact, q l'erreur : on a

$$Q = \frac{D}{\Delta}, \tag{1}$$

le quotient approché est

$$\frac{D + d}{\Delta + \delta};$$

on a donc

$$q = \frac{D + d}{\Delta + \delta} - \frac{D}{\Delta},$$

ou bien

(2) $$q = \frac{d\Delta - \delta D}{\Delta(\Delta + \delta)}.$$

Si nous divisons les équations (1) et (2) membre à membre, il vient

$$\frac{q}{Q} = \frac{\frac{d}{D} - \frac{\delta}{\Delta}}{\left(1 + \frac{\delta}{\Delta}\right)}.$$

Le premier membre de cette équation est l'erreur relative du quotient, le second membre doit donc être une autre expression de cette erreur. Il est sensiblement égal à

$$\frac{d}{D} - \frac{\delta}{D},$$

si l'on observe que $\frac{\delta}{D}$ est en général très-petit, ce qui démontre le théorème en question.

X. — DES SOLUTIONS DE LA FORME $\frac{m}{0}$.

Rappelons que l'on appelle *limite* d'une quantité variable une quantité fixe dont cette quantité variable peut s'approcher indéfiniment, c'est-à-dire de telle sorte que la différence entre ces deux quantités puisse être prise moindre en valeur absolue que toute quantité donnée.

On dit qu'une quantité variable est *infinie* quand on a l'intention de la faire croître indéfiniment; ainsi il est absurde de dire qu'une quantité qui ne varie pas est *in-*

finie, et zéro peut être une valeur particulière d'une quantité infinie. On voit quelle différence il existe entre l'infini métaphysique, qui est une chose complétement vague et incompréhensible, et l'infini mathématique, qui se définit d'une manière très-précise.

On dit qu'une quantité est *infiniment petite* quand elle a zéro pour limite.

Le symbole $\frac{m}{0}$ peut se présenter comme solution d'un problème et représente alors l'*infini;* mais cette locution ne présente aucun sens si on la prend à la lettre, et la solution $\frac{m}{0}$ ne sera censée représenter l'infini que si au zéro on substitue mentalement une quantité variable et infiniment petite. Essayons de nous faire comprendre par un exemple :

Concevons un courrier A *marchant avec une vitesse de a mètres par seconde dans le même sens qu'un courrier* B *parcourant b mètres par seconde : on demande à quelle époque ils se rencontreront, la distance à laquelle ils se trouvent l'un de l'autre étant l au moment du départ.*

Nous avons déjà résolu ce problème, et, en désignant par t le temps qui s'écoule depuis le moment du départ jusqu'au moment de la rencontre, on a

$$t = \frac{l}{a-b}.$$

Si dans cette formule on fait $a = b$, on trouve

$$t = \frac{l}{0};$$

on peut alors dire que les courriers se rencontrent à l'in-

fini; mais voici ce qu'il faut entendre par cette locution. A proprement parler, ils ne se rencontrent pas du tout quand $a=b$, c'est-à-dire quand ils marchent tous deux avec la même vitesse; mais, si au lieu de faire brusquement $a=b$ on suppose a fixe et b variable, $a-b$ prendra diverses valeurs, et l'on voit que t deviendra d'autant plus grand que $a-b$ sera plus petit, car une fraction est d'autant plus grande que son dénominateur est plus petit, et croît au delà de toute limite quand son dénominateur tend vers zéro, c'est-à-dire devient *infiniment petit*. Ainsi, dire pour $a=b$, t est infini, c'est énoncer d'une manière abrégée la proposition suivante :

Le temps au bout duquel la rencontre des courriers a lieu croît au delà de toute limite à mesure que la différence des espaces a et b parcourus dans une seconde tend vers zéro.

L'infini se désigne ordinairement, d'après Wallis, par le symbole ∞ (*).

XI. — THÉORÈMES SUR LES LIMITES.

THÉORÈME I. — *La limite d'une somme algébrique est égale à la somme algébrique des limites de ses parties.*

Soient, en effet, $x, y, z, \ldots$ des quantités variables, $a, b, c, \ldots$ leurs limites respectives; soient enfin α la différence $a-x$, β la différence $b-y, \ldots$, on aura

$$a=x+\alpha, \quad b=y+\beta, \quad \ldots,$$

d'où

$$a+b+\ldots=x+y+\ldots+\alpha+\beta+\ldots;$$

(*) Le signe ∞ chez les Romains représentait mille, et *mille* voulait quelquefois dire un nombre très-grand. (PROUHET.)

mais α, β, ... peuvent être pris chacun moindres que toute quantité donnée, puisque ces quantités représentent les différences entre les variables et leurs limites; si donc les quantités x, y, z, ... sont en nombre limité, α, β, ... seront en nombre limité, et leur somme pourra être rendue moindre que toute quantité donnée, ce qui revient à dire que $a+b+\ldots$ et $x+y+\ldots$ peuvent différer l'un de l'autre d'aussi peu que l'on veut; en d'autres termes, on a

$$a+b+\ldots=\lim(x+y+\ldots).$$

Il est essentiel de remarquer que nous avons supposé le nombre des parties de la somme variable limité; s'il n'en était plus ainsi, le théorème précédent pourrait tomber en défaut : c'est ce que nous établirons nettement un peu plus tard.

Théorème II. — *La limite d'un produit de plusieurs facteurs est égale au produit des limites de ces facteurs.*

Pour le démontrer, désignons par x, y, z, ... les facteurs variables, par a, b, c, ... leurs limites respectives; posons

$$x-a=\alpha,\quad y-b=\beta,\quad z-c=\gamma,\quad \ldots;$$

α, β, γ, ... pourront être pris aussi petits que l'on voudra, et l'on aura

$$x=a+\alpha,\quad y=b+\beta,\quad z=c+\gamma,\quad \ldots,$$

ou bien

$$xyz\ldots=(a+\alpha)(b+\beta)(c+\gamma)\ldots.$$

Si l'on effectue les multiplications indiquées, on trouve

$$xyz\ldots=abc\ldots+\omega,$$

ω désignant un ensemble de termes dans chacun desquels entre comme facteur l'une des quantités α, β, γ, ...; chacun de ces termes peut donc être pris aussi petit que l'on veut, et leur somme ω par conséquent aussi; donc la différence ω entre $xyz\ldots$ et $abc\ldots$ peut être prise aussi petite que l'on veut; en d'autres termes, $xyz\ldots$ a pour limite $abc\ldots$. C. Q. F. D.

Il faut observer que, en supposant que nous pouvions prendre ω moindre que toute quantité donnée, nous avons implicitement admis que le nombre des termes contenus dans ω était limité, ce qui suppose enfin le nombre des facteurs $x, y, z, \ldots$ limité.

Théorème III. — *La limite d'un quotient est égale au quotient des limites du dividende et du diviseur.*

En effet, soient D le dividende, d le diviseur, q le quotient; on a

$$D = dq,$$

$$\lim D = \lim dq = \lim d \lim q,$$

d'où

$$\lim q = \frac{\lim D}{\lim d}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

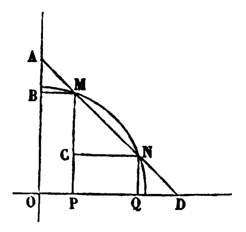
XII. — SUR LES SOLUTIONS DE LA FORME $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, ...

En résolvant l'équation d'un problème, on peut trouver une solution de la forme $\frac{0}{0}$; en général, ce symbole indique une indétermination dans les équations du problème, et par suite dans le problème lui-même. Toutefois, la solution que l'on trouve ainsi peut provenir d'une solution plus générale dans laquelle on a donné des valeurs particulières à certaines lettres qui entraient comme données

dans le problème; il peut arriver alors que le problème ne soit pas réellement indéterminé : c'est ce que nous allons constater sur un exemple.

PROBLÈME. — *Du sommet d'un angle droit* DOA *comme centre on décrit un cercle* (*fig.* 3); *par deux points* M *et* N

Fig. 3.



de ce cercle on fait passer une droite MN; *les distances* MP *et* NQ *des points* M *et* N *à la droite* OD *sont respectivement* δ *et* δ', *le rayon du cercle est* a : *on demande de calculer la ligne* AO.

Désignons AO par x. Les triangles ABM, MCN, semblables, donnent

$$\frac{AB}{BM} = \frac{MC}{CN}$$

ou

$$\frac{x - \delta}{\sqrt{a^2 - \delta^2}} = \frac{\delta - \delta'}{\sqrt{a^2 - \delta'^2} - \sqrt{a^2 - \delta^2}}.$$

Cette équation donne

$$(1) \qquad x = \delta + \frac{(\delta - \delta')\sqrt{a^2 - \delta^2}}{\sqrt{a^2 - \delta'^2} - \sqrt{a^2 - \delta^2}}.$$

Si l'on fait $\delta = \delta'$, on trouve

$$x = \delta + \frac{0}{0}.$$

La ligne AO, dans le cas que nous considérons, est réellement indéterminée, puisque toute droite passant en M passe aussi en N lorsque δ est devenu égal à δ'; cependant le point A tend vers une position *limite* à mesure que le point N s'approche de N; cette position *limite* est l'endroit où la tangente au cercle en M vient rencontrer OA : la quantité x a donc une valeur limite que l'on peut se proposer de déterminer à l'aide de la formule (1). Pour y arriver, il suffit de multiplier par $\sqrt{a^2-\delta'^2}+\sqrt{a^2-\delta^2}$ les deux termes de la fraction qui entre dans la formule (1); on trouve ainsi

$$x=\delta+\frac{(\delta-\delta')\sqrt{a^2-\delta^2}\left[\sqrt{a^2-\delta'^2}+\sqrt{a^2-\delta^2}\right]}{\delta^2-\delta'^2},$$

ou bien

$$x=\delta+\frac{\sqrt{a^2-\delta^2}\left[\sqrt{a^2-\delta'^2}+\sqrt{a^2-\delta^2}\right]}{\delta+\delta'}.$$

Les deux membres de cette formule sont constamment égaux : donc leurs limites sont égales; or la limite de la fraction qui entre dans la formule précédente est égale au quotient des limites de ses deux termes (th. III, p. 118); la limite de $\sqrt{a^2-\delta'^2}$, quand δ' tend vers δ, est $\sqrt{a^2-\delta^2}$, comme il est facile de le prouver par un raisonnement très-simple; donc enfin

$$\lim x=\delta+\frac{\sqrt{a^2-\delta^2}\times 2\sqrt{a^2-\delta^2}}{2\delta}=\delta+\frac{a^2-\delta^2}{\delta},$$

ou

$$\lim x=\frac{a^2}{\delta},$$

résultat exact, ainsi qu'il est facile de le constater directement.

Il serait difficile de donner des règles précises pour

lever l'indétermination apparente que l'on rencontre dans la résolution des problèmes. Le plus souvent les quantités limites qui se présentent sous la forme $\frac{0}{0}$ ou même $\frac{\infty}{\infty}$ prennent des valeurs déterminées après la suppression d'un facteur commun aux deux termes de la fraction, qui devient $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$.

Ainsi, par exemple, l'expression $\frac{a^2 - b^2}{a - b}\frac{h}{2}$, qui représente l'aire d'un trapèze dont la hauteur est h et dont les bases sont a et b, se présente sous la forme $\frac{0}{0}$ quand on y fait $a = b$, c'est-à-dire quand le trapèze devient un parallélogramme; cette indétermination apparente, ou plutôt cette absurdité apparente, disparaît lorsqu'on a supprimé aux deux termes de la fraction $\frac{a^2 - b^2}{a - b}$ le facteur $a - b$. L'aire du trapèze prend alors la valeur

$$(a + b)\frac{h}{2}.$$

Cette dernière expression est toujours égale à la précédente; leurs limites sont donc égales lorsque l'on fait tendre b vers a, et l'on trouve, dans ce cas,

$$\frac{2ah}{2} = ah;$$

c'est l'expression connue de l'aire du parallélogramme.

Proposons-nous de trouver la limite vers laquelle tend l'expression

$$\frac{n + 1}{n - 1}.$$

Lorsque n augmente indéfiniment, cette expression est

une de celles qui se présentent sous la forme $\frac{\infty}{\infty}$. On a

$$\frac{n+1}{n-1} = \frac{1+\frac{1}{n}}{1-\frac{1}{n}};$$

donc

$$\lim \frac{n+1}{n-1} = \lim \frac{1+\frac{1}{n}}{1-\frac{1}{n}} = \frac{\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\lim\left(1-\frac{1}{n}\right)} = \frac{1+\lim\frac{1}{n}}{1-\lim\frac{1}{n}} = 1.$$

EXERCICES.

1. Diophante passa dans sa jeunesse le $\frac{1}{6}$ de l'âge qu'il vécut, $\frac{1}{12}$ dans l'adolescence; ensuite il se maria et passa dans cette union le $\frac{1}{7}$ de sa vie augmenté de 5 ans avant d'avoir un fils, auquel il survécut de 4 ans, et qui n'atteignit que la moitié de l'âge où son père est parvenu. Quel âge avait Diophante lorsqu'il mourut? (Traduction d'un passage grec trouvé dans un Recueil d'épigrammes.)

2. a bœufs en m jours ont mangé α mètres carrés d'herbe; b bœufs en n jours ont mangé β mètres carrés d'herbe : combien c bœufs en p jours mangeront-ils d'herbe, en admettant que l'herbe croisse pendant qu'ils mangent? (Posé en d'autres termes dans l'*Arithmétique universelle* de Newton.)

3. A quelles heures ont lieu les rencontres des aiguilles d'une montre?

L'aiguille des heures, celle des minutes et celle des secondes peuvent-elles se rencontrer ailleurs que sur midi?

4. Un homme entre dans une église avec une somme composée de pièces de 2^{fr}; il donne aux pauvres autant de sous qu'il a de pièces de 2^{fr}; Dieu change les pièces de 2^{fr} qui lui restent en pièces de 5^{fr};

l'homme rentre chez lui avec le double de ce qu'il avait en entrant dans l'église, après avoir dépensé 7 pièces de 5^{fr} : quelle somme avait-il d'abord ?

Les quatre problèmes suivants sont extraits de l'Algèbre d'Euler, où le lecteur pourra trouver des énoncés très-originaux.

5. Quelqu'un a deux gobelets d'argent avec un seul couvercle pour tous les deux ; le premier pèse 12 onces, et si l'on y met le couvercle il pèse deux fois plus que l'autre gobelet ; mais, si l'on couvre l'autre gobelet, celui-ci pèse trois fois plus que le premier : trouver le poids du second gobelet et celui du couvercle.

6. Un père laisse à sa mort quelques enfants avec un bien qu'ils partagent comme il suit :

Le premier reçoit 100 écus, plus la dixième partie du reste,
Le deuxième » 200 » »
Le troisième » 300 » »

et ainsi de suite ; le bien se trouve ainsi également partagé entre tous les enfants ; trouver leur nombre et la part de chacun d'eux.

7. Un capitaine a trois compagnies, l'une de Suisses, l'autre de Souabes, la troisième de Saxons ; il veut donner un assaut avec ces troupes et il promet une récompense de 901 écus à distribuer comme il suit :

Chaque soldat de la compagnie marchant la première à l'assaut recevra un écu, et le reste sera distribué également aux autres compagnies.

Si les Suisses donnent les premiers, chaque soldat des autres compagnies reçoit $\frac{1}{2}$ écu ; si les Souabes donnent les premiers, chaque soldat des autres compagnies reçoit $\frac{1}{3}$ d'écu ; enfin, si les Saxons donnent les premiers, chacun des soldats des autres compagnies reçoit $\frac{1}{4}$ d'écu : de combien d'hommes se compose chaque compagnie ?

8. Une femme porte des œufs au marché ; elle en vend à une première personne la moitié plus la moitié d'un œuf, à une seconde personne la moitié de ce qui lui reste plus la moitié d'un œuf, à une troisième personne la moitié de ce qui reste plus la moitié d'un œuf ; il se trouve alors qu'elle a tout vendu : combien avait-elle d'œufs en arrivant au marché ?

9. Calculer la hauteur d'un triangle, connaissant la base et la longueur de la parallèle menée à la distance d de cette base et terminée aux deux autres côtés de ce triangle. (Discuter la solution.)

10. Calculer les segments interceptés par les bissectrices de l'angle d'un triangle sur la base opposée, connaissant les trois côtés de ce triangle.

11. Il est bon d'observer et de retenir que le système suivant est incompatible ou indéterminé :

$$\begin{aligned} bz - cy &= A, \\ cx - az &= B, \\ ay - bx &= C; \end{aligned}$$

s'il n'est pas incompatible, on doit avoir identiquement

$$aA + bB + cC = 0.$$

12. Des formules

$$\begin{aligned} ax + by + cz &= 1, \\ a'x + b'y + c'z &= 1, \\ ax' + by' + cz' &= 1, \\ a'x' + b'y' + c'z' &= 1, \end{aligned}$$

on tire

$$\frac{x - x'}{bc' - cb'} = \frac{y - y'}{ca' - ac'} = \frac{z - z'}{ab' - ba'} = \frac{a - a'}{yz' - zy'} = \frac{b - b'}{zx' - xz'} = \frac{c - c'}{xy' - yx'}.$$

(Plucker).

Le lecteur fera bien de résoudre par l'Algèbre les règles d'intérêt, de partages proportionnels et d'alliage ou de mélange; ces dernières surtout se résolvent ainsi avec une extrême facilité. Voici du reste quelques problèmes que l'on trouve proposés dans les cours d'Arithmétique, mais dont la solution dépend facilement des équations du premier degré.

13. Une fontaine coulant seule remplit un bassin en a heures; une seconde fontaine coulant seule le remplirait en b heures : combien leur faudrait-il de temps pour le remplir si elles coulaient simultanément?

14. On a deux billets, l'un de 1000^{fr} payable dans 3 mois escompte

3 pour 100, l'autre de 2500[fr] payable dans deux mois; on propose d'acheter ces deux billets moyennant une somme de 3409[fr] payable dans 15 jours : à quel taux se trouverait ainsi escompté le second billet ?

15. Un individu achète une montre et sa chaîne; il dépense ainsi la moitié de la somme qu'il possède dans son porte-monnaie; réfléchissant qu'il a fait une mauvaise affaire, il revend sa montre aux trois quarts du prix où il l'a achetée, et sa chaîne au double du prix qu'il l'a payée; il se trouve alors en possession de 200[fr]; s'il avait revendu sa montre 10[fr] de plus et sa chaîne 100[fr], il serait rentré dans ses fonds : quelle somme possédait-il, et combien a-t-il acheté la chaîne et la montre ?

16. Trouver une fraction qui augmente de $\frac{1}{18}$ quand on ajoute 3 à ses deux termes et qui diminue de $\frac{1}{12}$ quand on retranche 2 de ses deux termes.

17. Un enfant a des billes dans chacune de ses mains; s'il en retire 4 de la main gauche pour les mettre dans la main droite, il aura deux fois plus de billes dans la main droite que dans la main gauche; si au contraire il retire deux billes de la main droite, il aura quatre fois plus de billes dans la main gauche que dans la main droite : combien a-t-il de billes dans chaque main ?

18. On appelle *carré magique* une sorte d'échiquier contenant n^2 cases; dans chaque case on écrit un nombre, de telle sorte que la somme des nombres inscrits dans une même ligne horizontale ou verticale soit la même quelle que soit la ligne considérée. Voici un exemple de carré magique :

6	1	8
7	5	3
2	9	4

On voit que la somme des nombres placés dans une même rangée

horizontale ou verticale donne 15; la somme des nombres placés dans une diagonale donne 15 aussi. La formation d'un carré magique dépend de la résolution de plusieurs équations du premier degré; ces équations sont en nombre inférieur à celui des inconnues, mais les solutions doivent être entières.

19. AB désignant la distance de deux points comptée de A vers B sur un axe fixe, AB aura un signe et l'on aura AB = — BA; cela posé, prouver que, si l'on a trois points en ligne droite A, B, C, on a toujours

$$AB + BC = AC;$$

si l'on a quatre points en ligne droite A, B, C, D, on a

$$AB.CD + AD.BC + AC.DB = 0;$$

si P et Q sont les points où les bissectrices de l'angle A d'un triangle rencontrent la base BC, on a

$$PB.RC + PC.QB = 0.$$

20. Trouver des valeurs de x et y satisfaisant aux inégalités

$$ax + by > c, \quad a'x + b'y > c.$$

21. Trouver la limite des quantités suivantes :

$$\lim \frac{x^4 - 1}{x - 1} \quad \text{pour} \quad x = 1,$$

$$\lim \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{a - b} \quad \text{pour} \quad a = b,$$

$$\lim \frac{x^3 + x}{x^3 - 1} \quad \text{pour} \quad x = \infty,$$

$$\lim \frac{\sin x - \sin a}{\cos x - \cos a} \quad \text{pour} \quad x = a.$$

22. Si l'on joint les milieux A', B', C' des côtés d'un triangle ABC, on obtient un nouveau triangle A'B'C'; si l'on joint les milieux A", B", C" des côtés de A'B'C', on obtient un nouveau triangle A"B"C", et ainsi de suite : prouver que les points A^n, B^n, C^n ont pour limite pour $n = \infty$ le centre de gravité du triangle.

23. Soit x un nombre quelconque; posons

$$x_1 = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right), \quad x_2 = \frac{1}{2}\left(x_1 + \frac{1}{x_1}\right), \quad x_3 = \frac{1}{2}\left(x_2 + \frac{1}{x_2}\right), \ldots;$$

prouver que x_n a pour limite 1 quand $n = \infty$.

24. Inscrire dans un triangle donné un rectangle de périmètre donné. (On calculera la base et la hauteur du rectangle en fonction de la base et de la hauteur du triangle.)

25. Trouver les rayons de deux cercles, connaissant leurs centres et les points de concours de leurs tangentes communes intérieures et extérieures.

26. Calculer les côtés d'un triangle, connaissant trois des rayons des cercles qui touchent ses côtés.

27. Étant données les bases et la hauteur d'un trapèze, calculer la longueur de la ligne parallèle aux bases qui partage ce trapèze en deux parties équivalentes.

28. Dans quel rapport une droite de longueur donnée, parallèle aux bases d'un trapèze, partage-t-elle les côtés non parallèles de ce trapèze?

29. Par un point donné, on demande de faire passer une droite qui intercepte sur les côtés d'un angle donné deux segments dont la moyenne harmonique soit une ligne donnée.

30. Deux points parcourent des droites OA et OB concourantes avec des vitesses a et b; ils partent en même temps de points A et B : on demande de prouver qu'au bout d'un certain temps (positif ou négatif) ils se trouveront de nouveau à une distance égale à celle qu'ils avaient au moment du départ. (Discuter le résultat.)

N. B. — Il est entendu que les questions de Géométrie posées ci-dessus doivent être résolues avec le seul secours de l'Algèbre.

31. Étant donnés quatre points fixes A, B, C, D dans un plan, pour tout point M de ce plan on aura

$$a.\overline{MA}^2 + b.\overline{MB}^2 + c.\overline{MC}^2 + d.\overline{MD}^2 = p,$$

a, b, c, d, p désignant des nombres qui restent les mêmes quand on fait varier la position du point M. La condition nécessaire et suffisante pour que les points A, B, C soient en ligne droite est que $d = 0$. Étant donnés les points A, B, C, déterminer D de telle sorte que

$$a = b = c = d.$$

32. Étant donnés cinq points fixes A, B, C, D, E dans l'espace, pour tout point M on aura

$$a.\overline{MA}^2 + b.\overline{MB}^2 + c.\overline{MC}^2 + d.\overline{MD}^2 + e.\overline{ME}^2 = p,$$

a, b, c, d, e, p désignant des nombres indépendants de la position du point M. La condition nécessaire et suffisante pour que A, B, C, D soient dans un même plan est $e = 0$.

33. Trouver un point tel que ses distances à trois droites fixes soient proportionnelles à trois lignes données. Discuter la solution.

34. Trouver dans l'espace un point tel que ses distances à quatre plans fixes soient proportionnelles à trois nombres donnés. Discuter la solution.

35. Trouver dans un plan un point tel que ses distances à quatre points donnés soient proportionnelles à des nombres donnés. Pourquoi le problème n'est-il pas possible quand ces nombres donnés sont égaux? (*Voir* n° 31.)

36. Trouver dans l'espace un point tel que ses distances à cinq points donnés soient proportionnelles à des nombres donnés. Le problème est-il toujours possible? (*Voir* n° 32.)

37. Sur chaque côté d'un triangle T on donne trois segments, et l'on propose de trouver dans le plan du triangle un point tel que, en le prenant pour sommet d'un triangle ayant pour base l'un des segments en question, les sommes des aires de trois triangles ayant leurs bases sur trois côtés différents du triangle T soient les mêmes.

38. Un cône solide dont la densité est δ est posé par sa base sur un liquide dont la densité est $\Delta > \delta$: les dimensions de ce cône étant données, on demande de combien il s'enfoncera dans le liquide.

CHAPITRE VI.

DES DÉTERMINANTS.

I. — DÉFINITIONS.

Lorsque l'on a un système de n^2 quantités

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

on appelle *lignes* les rangées horizontales ou, si l'on veut, l'ensemble des lettres affectées du même premier indice; les *colonnes* sont les rangées verticales ou l'ensemble des lettres affectées du même second indice. Ainsi a_{ij} sera l'*élément* de la $i^{\text{ième}}$ ligne et de la $j^{\text{ième}}$ colonne.

On appelle *déterminant* (*) du système des n^2 éléments (1) la somme de tous les produits obtenus en prenant un élément dans chaque ligne et dans chaque colonne, de telle sorte que dans aucun de ces produits il ne se trouve deux éléments appartenant à la même ligne ou à la même colonne (c'est-à-dire portant même premier indice ou même second indice); chacun de ces produits porte un signe déterminé par les considérations suivantes.

(*) D'après Gauss et Jacobi; *résultante* d'après Laplace et Cauchy. Cauchy et Jacobi ont aussi employé la dénomination de *sommes alternées* avec la notation $\Sigma \pm a_{11} a_{22} \ldots a_{nn}$. La dénomination de *déterminant* est généralement adoptée.

Considérons le produit

$$(2)\qquad a_{x\xi}a_{y\eta}a_{z\zeta}\ldots a_{p\varpi}a_{q\chi}\ldots a_{s\sigma}a_{t\tau}$$

de n facteurs, qui fait partie du déterminant; effectuons les différences des premiers indices dans l'ordre où ils se présentent, et les différences des seconds indices aussi dans l'ordre où ils se présentent (*), et formons le produit de ces différences, à savoir :

$$(3)\quad \begin{cases} (y-x)(z-x)\ldots(t-x).(z-y)\ldots(t-y)\ldots(t-s), \\ (\eta-\xi)(\zeta-\xi)\ldots(\tau-\xi).(\zeta-\eta)\ldots(\tau-\eta)\ldots(\tau-\sigma). \end{cases}$$

Si ce produit est positif, on donne au terme (2) le signe +; on lui donne le signe — dans le cas contraire.

Je dis que la définition précédente est nette et précise; en d'autres termes, je dis que le signe du produit (2) est bien déterminé et indépendant de l'ordre dans lequel on écrit les facteurs $a_{x\xi}$, $a_{y\eta}$, ... Pour le prouver, il suffit de faire voir que le signe en question ne change pas quand on intervertit l'ordre de deux facteurs consécutifs quelconques, parce qu'alors on pourra, en intervertissant successivement l'ordre d'un certain nombre de facteurs consécutifs, faire passer tel facteur à la place que l'on voudra. Considérons donc les deux facteurs consécutifs

$$a_{p\varpi},\quad a_{q\chi}$$

du produit (2). Les permuter, c'est permuter dans le produit (3) les lettres p et q d'une part dans la première ligne de ce produit, ϖ et χ d'autre part dans la seconde ligne du même produit (3); or le changement de

(*) J'entends par là que, étant donné l'ordre dans lequel les facteurs a sont écrits dans le produit (2), les différences des indices en question doivent être faites en retranchant toujours l'indice précédent de l'indice suivant.

p en q altère le signe de la seule différence $q - p$, qui devient $p - q$; le changement de χ en ϖ altère le signe de la seule différence $\chi - \varpi$, qui devient $\varpi - \chi$; ainsi, la permutation des facteurs $a_{p\varpi}$, $a_{q\chi}$ introduit un double changement de signe dans le produit (3), c'est-à-dire que, en définitive, ce produit et par suite le produit (2) conservent leur signe quand on permute leurs facteurs.

II. — PROPRIÉTÉS DES DÉTERMINANTS.

Théorème I. — *Un déterminant conserve sa valeur quand ses lignes deviennent colonnes et que ses colonnes deviennent lignes.*

En effet, soit D le déterminant des quantités (1), D′ ce que devient ce déterminant quand on remplace les lignes par les colonnes. D et D′ contiennent tous deux le terme $a_{x\xi}a_{y\eta}\ldots a_{t\tau}$ et dans D comme dans D′ le signe est celui du produit (3).

Théorème II. — *Lorsque dans un déterminant on permute deux lignes (ou deux colonnes), ce déterminant se trouve multiplié par* -1.

En effet, soient p et q les numéros des lignes permutées; le déterminant est une somme de termes de la forme $\pm\ldots a_{p\varpi}a_{q\chi}\ldots$ (*) où les points indiquent des lettres manquantes ne portant aucune le premier indice p ou q. En permutant les deux lignes en question, on permute dans chaque produit les indices p et q; mais alors le signe du

(*) Nous avons vu que l'on pouvait écrire les facteurs dans un ordre quelconque; nous écrivons alors l'élément $a_{p\varpi}$ à côté de $a_{q\nu}$ pour faciliter le raisonnement.

produit (3) est changé, en sorte que le signe du terme considéré $\pm \ldots a_{p\varpi} a_{q\chi} \ldots$ est simplement changé; cette proposition étant vraie pour tous les termes du déterminant considéré, il en résulte que le signe de ce déterminant se trouve lui-même changé. C. Q. F. D.

THÉORÈME III. — *Un déterminant dans lequel il existe deux lignes (ou deux colonnes) identiques est nul.*

En effet, supposons que la $p^{\text{ième}}$ et la $q^{\text{ième}}$ ligne soient identiques : en les permutant, on n'altère évidemment pas le déterminant, qui reste identique à lui-même; mais, d'après le théorème précédent, il doit se trouver multiplié par -1. En appelant D la valeur du déterminant en question, on doit donc avoir $D = -D$, c'est-à-dire $D = 0$.

C. Q. F. D.

Il est bon de faire connaître la définition que l'on donnait autrefois du signe de chaque terme dans un déterminant. On supposait un terme quelconque ordonné par rapport à ses facteurs de telle sorte que, par exemple, les premiers indices allaient en croissant. On disait alors que le signe du terme était + *si le nombre des inversions était pair* et — *si le nombre des inversions était impair;* d'ailleurs deux lettres formaient une inversion si le second indice de la première était plus grand que le second indice de la seconde. Cette définition est comprise dans la nôtre, puisque nous avons prouvé que nous pouvions écrire les facteurs d'un produit dans un ordre arbitraire sans changer son signe.

THÉORÈME IV. — *Si dans un déterminant tous les éléments d'une même ligne (ou d'une même colonne) sont nuls à l'exception d'un seul, ce déterminant se réduit au produit de cet élément par un déterminant de degré moindre.*

En effet, considérons le déterminant (1) et supposons d'abord $a_{12} = a_{13} = a_{14} = \ldots = a_{1n} = 0$ et $a_{11} \gtrless 0$. Si nous appelons ε le signe du produit

$$P = (\beta - \alpha)(\gamma - \alpha)\ldots(\nu - \alpha)(\gamma - \beta)(\nu - \beta)\ldots(\nu - \mu),$$

le déterminant (1) pourra se représenter par le symbole

$$\sum \varepsilon a_{1\alpha} a_{2\beta} a_{3\gamma} \ldots a_{n-1\mu} a_{n\nu};$$

en supprimant alors les termes pour lesquels $\alpha > 1$, lesquels sont nuls, puisque $a_{1\alpha}$ est nul pour $\alpha > 1$, il reste

$$(D) \qquad a_{11} \sum \varepsilon' a_{2\beta} a_{3\gamma} \ldots a_{n\nu},$$

ε' désignant ce que devient le signe de P pour $\alpha = 1$. Ce signe est évidemment celui du produit

$$P' = (\gamma - \beta)\ldots(\nu - \beta)\ldots(\mu - \nu).$$

On voit immédiatement alors que l'expression (D) est, par définition, égale au produit de a_{11} par le déterminant obtenu en supprimant dans (1) la première ligne et la première colonne.

Supposons maintenant que tous les éléments de la $i^{\text{ième}}$ ligne soient nuls, à l'exception de a_{ij}. Échangeons la $i^{\text{ième}}$ ligne successivement avec chacune des $i - 1$ lignes placées avant elle; le déterminant se trouvera multiplié par $(-1)^{i-1}$, mais la $i^{\text{ième}}$ ligne sera devenue la première. Échangeons la $j^{\text{ième}}$ colonne successivement avec chacune des précédentes; elle deviendra la première, et le déterminant se trouvera multiplié par $(-1)^{i-1} \times (-1)^{j-1}$ ou par $(-1)^{i+j}$. Toutes les lignes et toutes les colonnes auront conservé leur ordre, à l'exception de la $i^{\text{ième}}$ ligne et de la $j^{\text{ième}}$ colonne; mais l'élément a_{ij} occupe la première place,

et nous sommes ramenés au cas examiné tout à l'heure. Ainsi, dans le déterminant (1), le coefficient de a_{ij} est égal au produit de $(-1)^{i+j}$ par le déterminant obtenu en supprimant dans (1) la $i^{\text{ième}}$ et la $j^{\text{ième}}$ colonne qui contiennent a_{ij}.

On verrait de la même façon que le coefficient de $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ est le déterminant obtenu en supprimant les deux premières lignes et les deux premières colonnes, etc., et l'on peut ainsi décomposer un déterminant quelconque en une somme de produits de déterminants de degrés moindres. Nous n'insistons pas sur ce point, qui n'offre pas de grandes difficultés. Le problème suivant va éclaircir ce que nous venons de dire.

Problème. — *Étant donné le déterminant*

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \dots & l_1 \\ a_2 & b_2 & \dots & l_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & b_n & \dots & l_n \end{vmatrix} = D,$$

on propose de l'ordonner suivant les éléments d'une même ligne ou d'une même colonne.

En d'autres termes, si nous posons par exemple

$$D = A_i a_i + B_i b_i + \dots + L_i l_i,$$

il s'agit de déterminer A_i, B_i, ..., L_i. Pour y parvenir, on observe que $A_i a_i$ n'est autre chose que ce que devient D quand on y suppose

$$b_i = 0, \quad c_i = 0, \quad \dots, \quad l_i = 0,$$

que $B_i b_i$ est la valeur de D pour

$$a_i = 0, \quad c_i = 0, \quad \dots, \quad l_i = 0, \quad \dots.$$

On a donc, en vertu du théorème précédent,

$$A_i = (-1)^{i+1} \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & \dots & l_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{i-1} & c_{i-1} & \dots & l_{i-1} \\ b_{i+1} & c_{i+1} & \dots & l_{i+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & \dots & \dots & l_n \end{vmatrix},$$

$$B_i = (-1)^{i+2} \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & \dots & l_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i-1} & c_{i-1} & \dots & l_{i-1} \\ a_{i+1} & c_{i+1} & \dots & l_{i+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & c_n & \dots & l_n \end{vmatrix}, \quad \dots.$$

A_i, B_i, ... sont ce que l'on appelle les *déterminants mineurs* du déterminant (1).

(En général, on appelle *déterminants mineurs* d'un déterminant ceux que l'on obtient en supprimant un nombre quelconque de lignes et un égal nombre de colonnes; l'*ordre* d'un mineur est le nombre de lignes que l'on a supprimées dans le déterminant primitif.)

On trouve ainsi successivement

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - b_1 a_2$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$= a_1 b_2 c_3 - a_1 c_2 b_3 - a_2 b_1 c_3 + a_2 c_1 b_3 + a_3 b_1 c_2 - a_3 c_1 b_2$$

. . . .



III. — RÉSOLUTION D'UN SYSTÈME GÉNÉRAL D'ÉQUATIONS LINÉAIRES.

C'est en essayant de trouver des formules générales pour la résolution des équations *linéaires* ou du premier degré que les géomètres sont arrivés à la notion des déterminants. En étudiant avec soin les propriétés du dénominateur commun des inconnues dans les équations à deux, trois et quatre inconnues, ils ont fini par y découvrir une loi de formation qui n'est autre que celle des déterminants.

Considérons le système d'équations suivant, dans lequel $x_1, x_2, \ldots, x_n$ désigneront les inconnues et dans lequel les autres lettres désigneront des coefficients indépendants des inconnues :

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1i}x_i + \ldots + a_{1n}x_n = s_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2i}x_i + \ldots + a_{2n}x_n = s_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \ldots + a_{ji}x_i + \ldots + a_{jn}x_n = s_j, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{ni}x_i + \ldots + a_{nn}x_n = s_n. \end{array}\right.$$

Désignons par D le déterminant formé avec tous les coefficients des inconnues pris dans l'ordre où ils se présentent ; ainsi, soit

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix};$$

désignons par $(-1)^{i+j}A_{ij}$ en général le déterminant mineur obtenu en supprimant la ligne et la colonne qui contiennent l'élément a_{ij}, ou, si l'on veut, la $i^{\text{ième}}$ ligne et la $j^{\text{ième}}$ colonne. On pourra ordonner D, suivant les éléments de sa première

colonne; A_{ij} sera le coefficient de a_{ij} dans D et l'on aura (p. 134)

$$(2) \qquad D = A_{11}a_{11} + A_{21}a_{21} + \ldots + A_{n1}a_{n1};$$

mais on aura aussi (p. 132)

$$(3) \qquad \left\{ \begin{array}{l} o = A_{11}a_{12} + A_{21}a_{22} + \ldots + A_{n1}a_{n2}, \\ o = A_{11}a_{13} + A_{21}a_{23} + \ldots + A_{n1}a_{n3}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ o = A_{11}a_{1n} + A_{21}a_{2n} + \ldots + A_{n1}a_{nn}. \end{array} \right.$$

En effet, les seconds membres de ces équations ne sont autre chose que le déterminant D, dans lequel on a remplacé la première colonne par la seconde, la troisième, etc. Cela posé, nous examinerons d'abord le cas où tous les déterminants mineurs A_{11}, A_{21}, ..., A_{n1} ne sont pas nuls à la fois.

En multipliant alors la première équation (1) par A_{11}, la seconde par A_{21}, la suivante par A_{31} et ainsi de suite, et en ajoutant les résultats, on obtiendra une conséquence légitime de ces équations (p. 80) qui pourra remplacer l'une quelconque d'entre elles. Or dans le résultat, en vertu de (2), le coefficient de x_1 sera D; celui de x_2, celui de x_3, ... seront nuls; ils sont en effet égaux aux seconds membres des équations (3), et l'on aura simplement

$$(4) \qquad Dx_1 = A_{11}s_1 + A_{21}s_2 + \ldots + A_{n1}s_n,$$

d'où l'on conclura la valeur de l'inconnue x_1:

$$x_1 = \frac{A_{11}s_1 + A_{21}s_2 + \ldots + A_{n1}s_n}{D}.$$

On aurait de la même façon

$$x_i = \frac{A_{1i}s_1 + A_{2i}s_2 + \ldots + A_{ni}s_n}{D}.$$

Ainsi, quand les mineurs de D ne sont pas nuls, on peut énoncer la règle suivante, dite de Cramer :

THÉORÈME. — *Les racines d'un système d'équations linéaires, en nombre égal à celui des inconnues, sont des fractions ayant pour dénominateur commun le déterminant du système des coefficients des inconnues et pour numérateurs les déterminants obtenus en remplaçant dans le dénominateur commun la colonne qui contient les coefficients de l'inconnue que l'on cherche par une colonne formée des seconds membres des équations proposées.*

IV. — DISCUSSION DES FORMULES PRÉCÉDENTES.

Les conclusions précédentes tomberaient en défaut si le dénominateur D était nul. En effet, la formule (4), *conséquence légitime* des équations (1), serait en général absurde, le premier membre étant nul et le second différent de zéro; le système (1) serait donc lui-même absurde. Toutefois, si le déterminant

$$A_{11}s_1 + A_{21}s_2 + \ldots + A_{n1}s_1$$

était nul aussi, la formule (4) se réduirait à l'identité $0 = 0$, qui n'aurait plus rien d'absurde; mais alors, en multipliant la deuxième équation (1) par A_{21}, la troisième par A_{31}, etc., et en les ajoutant, on aurait une équation qui, en vertu des formules (2), (3), (4), se réduirait identiquement à

$$A_{11}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n) = A_{11}s_1.$$

C'est la première équation (1) multipliée par A_{11}. La première équation (1) est donc une conséquence des autres, et, x_1 étant choisi arbitrairement, $n - 1$ des équations (1) serviront à calculer les autres inconnues, si leur déterminant n'est pas nul.

Si $A_{11}, A_{21}, \ldots, A_{n1}$ étaient tous nuls, la formule (4) serait bien une identité, mais on ne serait plus en droit de conclure que les équations (1) forment un système indéterminé; en effet, (4) ne serait plus une conséquence du système (1) puisqu'on l'obtient en ajoutant les équations de ce système (1) multipliées par zéro, ce qui n'a aucun sens.

Il reste donc à examiner le cas où tous les déterminants mineurs A_{ij} sont nuls. Ce cas a été traité pour la première fois par M. Fonténé, maître d'études au lycée Saint-Louis, et par M. Rouché.

Nous supposerons en général que tous les déterminants mineurs obtenus en supprimant $i-1$ lignes et $i-1$ colonnes dans D soient nuls (ce qui suppose les déterminants mineurs de degrés supérieurs nuls ainsi que D). Mais nous supposerons que l'un des déterminants mineurs obtenus en supprimant i lignes et i colonnes ne soit pas nul; ce sera, si l'on veut, le déterminant obtenu en ôtant dans D les i premières lignes et les i premières colonnes. Écrivons alors nos $n-i$ dernières équations et l'une des autres, la $j^{\text{ième}}$ par exemple, comme il suit :

$$\left\{\begin{array}{l} a_{j,i}x_i + a_{j,i+1}x_{i+1} + \ldots + a_{j,n}x_n = s_j - a_{j,1}x_1 - \ldots - a_{j,i-1}x_{i-1}, \\ a_{i+1,i}x_i + a_{i+1,i+1}x_{i+1} + \ldots + a_{i+1,n}x_n = s_{i+1} - a_{i+1,1}x_1 - \ldots - a_{i+1,i-1}x_{i-1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{n,i}x_i + a_{n,i+1}x_{i+1} + \ldots + a_{n,n}x_n = s_n - a_{n,1}x_1 - \ldots - a_{n,i-1}x_{i-1}. \end{array}\right.$$

Si l'on y considère $x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}$ comme donnés, le déterminant Δ du système des inconnues $x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n$ sera nul; mais le mineur de ce déterminant qui multiplie a_{ji} ne sera pas nul par hypothèse (c'est celui que l'on obtient en supprimant dans D les i premières lignes et les i premières colonnes). Appelant alors $\Delta_j, \Delta_{i+1}, \ldots, \Delta_n$ les coefficients de $a_{ji}, a_{i+1,i}, \ldots, a_{n,i}$ dans Δ, on aura en

ajoutant les formules (5), après les avoir multipliées respectivement par Δ_j, Δ_{i+1}, ..., Δ_n,

$$0 = \Delta_j s_j + \Delta_{i+1} s_{i+1} + \ldots + \Delta_n s_n,$$

car tous les coefficients tels que

$$\Delta_j a_{jk} + \Delta_{i+1} a_{i+1,k} + \ldots + \Delta_n a_{nk}$$

sont des déterminants mineurs de D nuls par hypothèse.

Si donc une ou plusieurs des quantités telles que

$$\Delta_j s_j + \Delta_{i+1} s_{i+1} + \ldots + \Delta_n s_n$$

n'est pas nulle identiquement, en supposant

$$j = 1, 2, 3, \ldots, i,$$

le système (1) *sera incompatible, sinon il sera indéterminé; la première équation* (5) *sera une conséquence des suivantes, ainsi que toutes les équations* (1) *non écrites dans le groupe* (5), *en sorte que* i *des quantités* x *pourront être choisies arbitrairement; les autres auront des valeurs bien déterminées, exprimées au moyen des premières.*

V. — REMARQUES.

Remarque I. — La règle de Cramer montre que les inconnues sont des fonctions linéaires des seconds membres des équations (1).

Remarque II. — Le système d'équations à n inconnues

$$\begin{array}{l} a_1 \quad x + b_1 \quad y + c_1 \quad z + \ldots + l_1 \quad u = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{n-1} x + b_{n-1} y + c_{n-1} z + \ldots + l_{n-1} u = 0 \end{array}$$

est évidemment indéterminé dans le cas général; mais, si l'on divise chacune des équations par u et si l'on considère

les rapports $\frac{x}{u}$, $\frac{y}{u}$, ..., ils auront des valeurs déterminées et l'on aura

$$x : \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & \ldots & l_1 \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdots & \cdot\cdot \\ b_{n-1} & c_{n-1} & \ldots & l_{n-1} \end{vmatrix} = y : \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & \ldots & l_n \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdots & \cdot\cdot \\ a_{n-1} & c_{n-1} & \ldots & l_{n-1} \end{vmatrix} = \ldots$$

Remarque III. — Si l'on veut éliminer les n quantités $x, y, z, \ldots, u$ entre les $n+1$ équations

$$(S) \quad \begin{cases} a_1 \;\; x + b_1 \;\; y + \ldots + l_1 \;\; u + s_1 \;\; = 0, \\ a_2 \;\; x + b_2 \;\; y + \ldots + l_2 \;\; u + s_2 \;\; = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{n+1} x + b_{n+1} y + \ldots + l_{n+1} u + s_{n+1} = 0, \end{cases}$$

il suffit de porter dans la dernière les valeurs de $x, y, z, \ldots$, u tirées des n premières; on trouve ainsi

$$a_{n+1} \begin{vmatrix} -s_1 & b_1 & \ldots & l_1 \\ -s_2 & b_2 & \ldots & l_2 \\ \cdots & \cdot\cdot & \cdots & \cdot\cdot \\ -s_n & b_n & \ldots & l_n \end{vmatrix} + b_{n+1} \begin{vmatrix} a_1 & -s_1 & \ldots & l_1 \\ a_2 & -s_2 & \ldots & l_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdot\cdot \\ a_n & -s_n & \ldots & l_n \end{vmatrix} + \ldots$$

$$+ s_{n+1} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \ldots & l_1 \\ a_2 & b_2 & \ldots & l_2 \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdots & \cdot\cdot \\ a_n & b_n & \ldots & l_n \end{vmatrix} = 0.$$

Si actuellement, dans chacun des déterminants qui figurent dans l'équation précédente, on place la colonne des s la dernière, ces déterminants vont être multipliés par certaines puissances de (-1), celui qui multiplie l_{n+1} excepté, car dans celui-là la colonne des s est la dernière; les signes de ces déterminants seront alternativement $+$ et $-$; si enfin on change les signes dans la colonne des s, chaque déterminant change de signe, excepté le coefficient de s_{n+1}; on voit ainsi (problème, p. 134) que le résultat

cherché de l'élimination est

$$(\mathrm{T}) \qquad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \ldots & l_1 & s_1 \\ a_2 & b_2 & \ldots & l_2 & s_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n+1} & b_{n+1} & \ldots & l_{n+1} & s_{n+1} \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation s'appelle la *résultante des équations proposées*.

Autrement, éliminer $x, y, \ldots, u$ entre les équations (S) ou éliminer $x, y, \ldots, u, t$ entre les suivantes,

$$(\mathrm{R}) \qquad \begin{cases} a_1 \quad x + b_1 \quad y + \ldots + l_1 \quad u + s_1 \quad t = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{n+1} x + b_{n+1} y + \ldots + l_{n+1} u + s_{n+1} t = 0, \end{cases}$$

qui sont homogènes et dans lesquelles on peut considérer les rapports $\frac{x}{t}, \frac{y}{t}, \frac{u}{t}$ comme les quantités à éliminer, sont deux opérations équivalentes. Or, éliminer $x, y, \ldots, u, t$ entre les formules (R), c'est écrire que ces équations ont encore lieu pour des valeurs de $x, y, z, \ldots, u, t$ différentes de zéro; c'est donc exprimer que le système (R) est indéterminé, ce qui se fera en égalant à zéro le déterminant des coefficients (p. 140).

Remarque IV. — Pour qu'un déterminant soit nul, il faut qu'il existe une même relation linéaire et homogène constante entre les éléments d'une même ligne ou d'une même colonne; l'équation (T), en effet, exprime qu'il existe des quantités $x, y, z, \ldots, u$ satisfaisant aux équations (S).

Remarque V. — Lorsque deux systèmes d'équations linéaires ont les mêmes solutions, l'une quelconque des équations du second système peut s'obtenir en ajoutant les

équations du premier multipliées respectivement par des facteurs convenablement choisis.

En effet, soit

$$(U) \qquad b_1 x_1 + b_2 x_2 + \ldots + b_n x_n = t,$$

une équation satisfaite pour les valeurs de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ qui satisfont à (1); puisque les équations (1) ont une solution, D n'est pas nul et l'on pourra, d'après la règle de Cramer, calculer des quantités $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ telles que l'on ait

$$\lambda_1 a_{1i} + \lambda_2 a_{2i} + \ldots + \lambda_n a_{ni} = b_i$$

pour $i = 1, 2, \ldots, n$. Si l'on multiplie alors la première équation (1) par λ_1, la seconde par λ_2, ... et si on les ajoute, on trouve

$$b_1 x_1 + b_2 x_2 + \ldots + b_n x_n = \lambda_1 s_1 + \lambda_2 s_2 + \ldots + \lambda_n s_n.$$

Cette équation et (U) ont lieu pour les mêmes valeurs de $x_1, x_2, \ldots, x_n$; leurs seconds membres sont donc identiques : donc enfin (U) s'obtient en multipliant les équations (1) par des facteurs λ convenablement choisis et en les ajoutant. C. Q. F. D.

VI. — SUR DES SIMPLIFICATIONS RELATIVES AU CALCUL DES DÉTERMINANTS.

Pour ajouter deux déterminants qui ne diffèrent que par une seule rangée, il suffit d'ajouter terme à terme les rangées non identiques; c'est ce qu'il est facile de prouver en mettant les deux déterminants sous la forme

$$A_1 a_1 + A_2 a_2 + \ldots + A_n a_n,$$
$$A_1 \alpha_1 + A_2 \alpha_2 + \ldots + A_n \alpha_n,$$

$a_1, a_2, \ldots, a_n$ et $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ désignant les éléments des

colonnes qui diffèrent. On trouve alors pour somme des déterminants en question

$$A_1(a_1+\alpha_1)+\ldots+A_n(a_n+\alpha_n),$$

ce qui démontre la règle que nous avions énoncée.

Cette règle n'est pas sans importance : il en résulte, en effet, qu'un déterminant ne change pas de valeur quand aux termes d'une rangée on ajoute ceux d'une rangée parallèle multipliés par un facteur constant, car cette opération revient à ajouter au déterminant proposé un déterminant dans lequel une rangée a ses termes équimultiples d'une rangée parallèle, c'est-à-dire nul. En appliquant cette remarque, on trouve

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

Nous donnerons encore la démonstration d'une formule remarquable.

Proposons-nous d'évaluer le produit des différences de n quantités

$$\left.\begin{matrix} (b-a)(c-a)(d-a)\ldots(l-a) \\ (c-b)(d-b)\ldots(l-b) \\ (d-c)\ldots(l-c) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (l-k) \end{matrix}\right\} = P.$$

Si l'on considère le déterminant

$$D = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & \ldots & a^{n-1} \\ 1 & b & b^2 & \ldots & b^{n-1} \\ 1 & c & c^2 & \ldots & c^{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & l & l^2 & \ldots & l^{n-1} \end{vmatrix},$$

D et P sont deux polynômes du degré $n-1$ en a qui se réduisent à zéro pour les $n-1$ valeurs $b, c, \ldots, l$ de a; ils sont donc tous deux égaux au produit de

$$(a-b)(a-c)\ldots(a-l)$$

par une quantité indépendante de a; en d'autres termes, leur rapport est indépendant de a (*voir* p. 42). On démontrerait de la même façon que leur rapport est indépendant de $b, c, \ldots, l$; pour déterminer ce rapport, il suffit d'observer que les termes en $1.b.c^2\ldots l^{n-1}$ ont tous deux pour coefficients l'unité dans P et dans D, et, par suite (p. 45, Remarque I), on a $P = D$.

C. Q. F. D.

On peut conclure de là que le résultat de l'élimination de $x, y, z, \ldots, u$ entre les équations

$$\begin{aligned} x + y + z + \ldots + u &= 0,\\ ax + by + cz + \ldots + lu &= 0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &\ldots,\\ a^{n-1}x + b^{n-1}y + \ldots + l^{n-1}u &= 0 \end{aligned}$$

s'obtient en égalant à zéro le produit des différences des quantités $a, b, c, \ldots, l$; si donc toutes ces quantités sont inégales, les équations précédentes sont compatibles.

VII. — MULTIPLICATION DES DÉTERMINANTS.

LEMME I. — *Soient*

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{nn} \end{vmatrix}.$$

Le déterminant

$$C = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & p_{11} & \dots & p_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & p_{n1} & \dots & p_{nn} \\ 0 & \dots & 0 & b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

dans lequel tous les éléments placés au-dessous des éléments a sont nuls, est égal à AB.

En effet, le déterminant C se composera de termes contenant n éléments a et de termes contenant moins de n éléments a. Or un terme qui contient moins de n éléments a contient au moins un élément appartenant aux colonnes des a, mais pris en dehors des lignes des a, c'est-à-dire un élément nul, et sera nul; donc le développement du déterminant C ne se composera que des termes contenant n éléments a, et par suite n éléments b; il sera donc indépendant des p.

Désignons par P le produit des différences que l'on peut former avec les indices $\alpha, \beta, \dots, \delta$, et par Q le produit des différences que l'on peut former avec les indices $\lambda, \mu, \dots, \rho$; le déterminant C sera de la forme

$$C = \Sigma(-1)^{P+Q} a_{1\alpha} a_{2\beta} \dots a_{n\delta} b_{1\lambda} b_{2\mu} \dots b_{n\rho},$$

le signe Σ se rapportant aux indices $\alpha, \beta, \dots, \delta, \lambda, \mu, \dots, \rho$. On peut encore écrire

$$C = \Sigma(-1)^{P} a_{1\alpha} a_{2\beta} \dots a_{n\delta} [\Sigma(-1)^{Q} b_{1\lambda} b_{2\mu} \dots b_{n\rho}],$$

c'est-à-dire, par définition,

$$C = \Sigma(-1)^{P} a_{1\alpha} a_{2\beta} \dots a_{n\delta} B = AB.$$

Ainsi on a bien $C = AB$.

Lemme II. — *On verrait de même que*

$$\begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & b_{n1} & \dots & b_{nn} \\ a_{11} & \dots & a_{1n} & p_{11} & \dots & p_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & p_{n1} & \dots & p_{nn} \end{vmatrix} = AB(-1)^n.$$

On passe, en effet, de ce déterminant au déterminant C en faisant n permutations de lignes.

D'après le lemme I on a

$$(2)\quad AB = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & -1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & -1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix}.$$

Ceci posé, 1° multiplions la $n+1^{\text{ième}}$ colonne par a_{11}, la $n+2^{\text{ième}}$ par a_{21}, ..., la dernière par a_{n1}, et ajoutons ces colonnes ainsi modifiées à la première; 2° multiplions la $n+1^{\text{ième}}$ colonne par a_{12}, la $n+2^{\text{ième}}$ par a_{22}, ..., la dernière par a_{n2}, et ajoutons ces colonnes ainsi modifiées à la seconde, et ainsi de suite. Si nous faisons, pour abréger l'écriture,

$$a_{11}b_{11} + a_{21}b_{12} + \dots + a_{n1}b_{1n} = c_{11},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$
$$a_{1i}b_{j1} + a_{2i}b_{j2} + \dots + a_{ni}b_{jn} = c_{ji},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

la formule (1) deviendra

$$AB = \begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ . & \dots & . & \dots & . & \dots & . \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \\ c_{11} & \dots & c_{1n} & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} & b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

ou, en vertu du lemme II,

$$(2) \qquad AB = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix}.$$

C'est dans cette dernière égalité que consiste la règle donnée par Binet et par Cauchy pour la multiplication de deux déterminants.

La formule (3) donne lieu encore à trois autres formules, que l'on obtient en changeant les lignes en colonnes dans les déterminants A et B. Ainsi, dans la formule (3), on peut supposer à volonté

$$c_{ij} = a_{1i}b_{1j} + a_{2i}b_{2j} + \dots + a_{ni}b_{nj},$$

ou

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj},$$

ou

$$c_{ij} = a_{i1}b_{j1} + a_{i2}b_{j2} + \dots + a_{in}b_{jn},$$

ou

$$c_{ij} = a_{1i}b_{j1} + a_{2i}b_{j2} + \dots + a_{ni}b_{jn}.$$

Application. — On a

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c & d \\ c' & d' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ac + bd & ac' + bd' \\ a'c + b'd & a'c' + b'd' \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} ac + a'c' & ad + a'd' \\ bc + b'c' & bd + b'd' \end{vmatrix} \dots,$$

ce qui donne les identités

$$\begin{aligned}(ab'-ba')(cd'-dc') &= (ac+bd)\,(a'c'+b'd') \\ &\quad -(ac'+bd')\,(a'c-b'd) \\ &= (ac+a'c')(bd+b'd') \\ &\quad -(ad+a'd')(bc+b'c')-\ldots.\end{aligned}$$

Si, par exemple, on fait $a=c$, $b=d$, $a'=c'$, $b'=d'$, on a

$$(ab'-ba')^2=(a^2+b^2)(a'^2+b'^2)-(aa'+bb')^2=\ldots.$$

Corollaire I. — Si l'on suppose $a_{n1}=0$, $a_{n2}=0$, ..., $a_{nn}=0$, $a_{n-1\,1}=0$, $a_{n-1\,2}=0$, ..., $a_{n-1\,n}=0$, ..., on voit que le déterminant $\Sigma\pm c_{11}\,c_{22}\ldots c_{nn}$ sera nul, c_{ij} étant défini par l'équation

$$c_{ij}=a_{1i}b_{1j}+a_{2i}b_{2j}+\ldots+a_{ki}b_{kj}\quad (k<n).$$

Corollaire II. — Si l'on forme avec les deux systèmes d'éléments

$$(3)\quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{k1} & a_{k2} & \ldots & a_{kn}\end{vmatrix},\qquad (4)\quad \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{k1} & b_{k2} & \ldots & b_{kn}\end{vmatrix}$$

les éléments

$$c_{ij}=a_{i1}b_{j1}+a_{i2}b_{j2}+\ldots+a_{in}b_{jn},$$

le déterminant $\Sigma\pm c_{11}, c_{22}, \ldots, c_{nn}$ sera égal à la somme des produits des déterminants obtenus en prenant k colonnes dans les Tableaux (3) et (4).

Cela tient évidemment à ce que, si dans un déterminant

$$\Sigma\pm p_{11}p_{22}\ldots p_{nn}$$

on change p_{11} en $p_{11}+q_{11}+r_{11}$, p_{12} en $p_{12}+q_{12}+r_{12}$, ..., p_{1n} en $p_{1n}+q_{1n}+r_{1n}$, ce déterminant devient

$$\Sigma\pm p_{11}p_{22}\ldots p_{nn}+\Sigma\, q_{11}p_{22}\ldots p_{nn}+\Sigma\pm r_{11}p_{22}\ldots p_{nn}+\ldots.$$

Voici une application :

$$\begin{vmatrix} a^2 + b^2 + c^2 & a\alpha + b\beta + c\gamma \\ a\alpha + b\beta + c\gamma & \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2 + b^2 & a\alpha + b\beta \\ a\alpha + b\beta & a^2 + b^2 \end{vmatrix}$$
$$+ \begin{vmatrix} b^2 + c^2 & b\beta + c\gamma \\ b\beta + c\gamma & \beta^2 + \gamma^2 \end{vmatrix}$$
$$+ \begin{vmatrix} c^2 + a^2 & c\gamma + a\alpha^2 \\ c\gamma + a\alpha & \gamma^2 + \alpha c\gamma \end{vmatrix},$$

ce qui revient à l'identité, souvent utile en Géométrie,

$$(a^2+b^2+c^2)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)=(a\beta-b\alpha)^2+(b\gamma-c\beta)^2+(c\alpha-a\gamma)^2.$$

EXERCICES ET NOTES.

1. On a

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = 3abc - a^3 - b^3 - c^3.$$

2. Les déterminants

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a^2 & b^2 \\ 1 & a^2 & 0 & c^2 \\ 1 & b^2 & c^2 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{vmatrix}$$

ont tous deux pour valeur

$$a^4 + b^4 + c^4 - 2b^2c^2 - 2a^2c^2 - 2b^2a^2$$

ou

$$-(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c).$$

3. On a

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} (a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d) \\ \quad \times (a+b+c+d). \end{array} \right.$$

4. On a

$$\begin{vmatrix} -1 & -\cos\gamma & \cos\beta \\ \cos\gamma & -1 & -\cos\alpha \\ -\cos\beta & \cos\alpha & -1 \end{vmatrix} = -1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma$$

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\gamma & \cos\beta \\ \cos\gamma & 1 & \cos\alpha \\ \cos\beta & \cos\alpha & 1 \end{vmatrix} = 1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$$

$$= 4\sin p \sin(p-\alpha)\sin(p-\beta)\sin(p-\gamma),$$

$2p$ désignant $\alpha+\beta+\gamma$.

5. Résoudre le système, à n inconnues $x, y, \ldots, u$,

$$\begin{array}{l} x + y + z + \ldots + u = s_0, \\ ax + by + cz + \ldots + lu = s_1, \\ a^2x + b^2y + c^2z + \ldots + l^2u = s_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a^{n-1}x + b^{n-1}y + c^{n-1}z + \ldots + l^{n-1}u = s_{n-1}. \end{array}$$

6. Résoudre les équations

$$\frac{x}{a+\lambda} + \frac{y}{b+\lambda} + \ldots + \frac{u}{l+\lambda} = 1,$$

$$\frac{x}{a+\mu} + \frac{y}{b+\mu} + \ldots + \frac{u}{l+\mu} = 1,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{x}{a+\rho} + \frac{y}{b+\rho} + \ldots + \frac{u}{l+\rho} = 1 \quad (*).$$

On trouve

$$x = \frac{(a+\lambda)(a+\mu)+\ldots+(a+\rho)}{(b-a)(c-a)+\ldots+(l-a)}, \quad y = \ldots.$$

(*) Ces équations ont été résolues diversement par Binet, Lamé, Jacobi. Elles sont très-importantes en Physique mathématique.

7. Si l'on considère le déterminant

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = D$$

et si l'on désigne par α_{ij} en général le coefficient de a_{ij} dans le développement de D, le déterminant

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} = \Delta$$

sera ce que l'on appelle le déterminant à éléments réciproques. Cela posé, on vérifiera que

$$\Delta = D^{n-1};$$

pour cela on multipliera D par Δ, et l'on trouvera un déterminant dont tous les éléments seront nuls, à l'exception de ceux qui forment une diagonale et qui seront égaux à D. (Cauchy.)

8. On a identiquement

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & b & c \\ 1 & a' & b' & c' \\ 1 & a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a+\lambda & b+\lambda & c+\lambda \\ 1 & a'+\lambda' & b+\lambda' & c'+\lambda' \\ 1 & a''+\lambda'' & b''+\lambda'' & c''+\lambda'' \end{vmatrix}$$

(Sylvester.)

9. Le déterminant

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{\alpha_1-\beta_1} & \frac{1}{\alpha_2-\beta_1} & \frac{1}{\alpha_n-\beta_1} \\ \frac{1}{\alpha_1-\beta_2} & \frac{1}{\alpha_2-\beta_2} & \frac{1}{\alpha_n-\beta_2} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ \frac{1}{\alpha_1-\beta_n} & \frac{1}{\alpha_2-\beta_n} & \frac{1}{\alpha_n-\beta_n} \end{vmatrix}$$

est égal au produit des différences que l'on peut faire avec les quantités α, multiplié par le produit des différences que l'on peut former avec les quantités β et divisé par le produit de toutes les différences telles que $\alpha_i - \beta_j$.

(CAUCHY.)

10. M. Cayley a appelé *déterminants gauches* ceux dans lesquels on a la relation $a_{ij} + a_{ji} = 0$; si l'on a en outre $a_{ii} = 0$, on dit que le déterminant est gauche et symétrique. Un déterminant gauche et symétrique qui a un nombre impair d'éléments est toujours nul. (On démontre ce théorème en s'appuyant directement sur la définition que nous avons donnée des déterminants et en montrant que les termes $a_{1\alpha} a_{2\beta} \ldots a_{n\lambda}$ et $a_{\alpha 1} a_{\beta 2} \ldots a_{\lambda n}$ sont égaux et de signes contraires ou nuls.) (La notation est celle de l'exercice 7.)

Un déterminant gauche et symétrique qui a un nombre pair d'éléments est le carré parfait d'une fonction entière de ses éléments. (Nous ne proposons pas ici la démonstration de ce théorème, mais on pourra la trouver quand on aura lu le dernier Chapitre de cet Ouvrage.) La racine carrée d'un déterminant gauche et symétrique est ce que l'on appelle un *pfaffien*.

(CAYLEY.)

11. Le déterminant $\Sigma \pm a_{11} a_{22} \ldots a_{nn}$ ne change pas de valeur quand on remplace a_{ij} par $a_{ij} + h_i + k_j$, les quantités $h_1, h_2, \ldots, h_n, k_1, k_2, \ldots, k_n$ étant arbitraires; pour le prouver, on multiplie le déterminant proposé successivement par

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & h_1 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & h_2 \\ . & . & . & \ldots & .. \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix} \quad \text{et par} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ . & .. & .. & \ldots & .. & . \\ k_1 & k_2 & k_3 & \ldots & k_n & 1 \end{vmatrix}.$$

(SYLVESTER.)

12. *Ouvrages à consulter*. — Baltzer, trad. par Hoüel; Brioschi, trad. par Combescure; l'*Algèbre supérieure,* de Salmon, trad. par Resal; Dostor (c'est l'Ouvrage le plus complet et le plus élémentaire). Le tout en vente chez Gauthier-Villars.

13. Voici un exercice propre à familiariser le lecteur avec le calcul numérique des déterminants. Les quinze déterminants que l'on peut

former en prenant quatre lignes parmi les suivantes sont nuls :

$$\begin{matrix} 0 & 0 & a_4 & -a_3 \\ 0 & a_4 & 0 & -a_2 \\ 0 & -a_3 & -a_2 & 0 \\ a_4 & 0 & 0 & a_1 \\ -a_3 & 0 & a_1 & 0 \\ a_2 & a_1 & 0 & 0. \end{matrix}$$

14. Un déterminant ne change pas de valeur si l'on change le signe des éléments dont la somme des indices est impaire. (JANNI).

15. On a identiquement

$$\begin{vmatrix} a_1 - b_1, & a_1 - b_2, & \dots & a_1 - b_n \\ a_2 - b_1, & a_2 - b_2, & \dots & a_2 - b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n - b_1, & a_n - b_2, & \dots & a_n - b_n \end{vmatrix} = 0.$$

CHAPITRE VII.

DES ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ ET DES QUESTIONS QUI EN DÉPENDENT.

I. — DE LA RACINE CARRÉE.

Le carré d'une quantité ou la seconde puissance de cette quantité est, comme on sait, le produit de deux facteurs égaux à cette quantité; il en résulte que tout carré est une quantité essentiellement positive.

On appelle *racine carrée* d'une quantité une quantité qui, multipliée par elle-même, reproduit la première; la racine carrée d'une quantité A se désigne par le symbole $\sqrt{A}$.

Théorème. — 1° *Les quantités négatives n'ont pas de racine carrée;* 2° *les quantités positives ont deux racines égales et de signes contraires;* 3° *zéro n'a qu'une racine qui est zéro.*

En effet, soit x la racine carrée de A; on aura, par définition même,

$$x^2 = A.$$

Or, si A est négatif, l'équation précédente n'a pas de racines, puisque le premier membre est positif et le second négatif; si nous supposons alors A positif et si nous désignons par a le nombre positif qui, élevé au carré, donne

A, nous aurons

$$x^2 = a^2$$

ou bien

$$x^2 - a^2 = 0.$$

Cette équation peut encore s'écrire

$$(x - a)(x + a) = 0.$$

Or il n'y a que deux manières d'annuler le premier membre de cette équation : c'est de faire $x - a = 0$ ou $x + a = 0$, d'où l'on tire

$$x = a \quad \text{ou} \quad x = -a,$$

ou, si l'on veut, en représentant par $\pm$ à volonté les signes $+$ et $-$,

$$x = \pm\sqrt{a},$$

$\sqrt{a}$ désignant l'une quelconque des deux valeurs de la racine carrée de A, la valeur positive, par exemple. Si $A = 0$, il est bien clair que de l'équation

$$x^2 = A \quad \text{ou} \quad x^2 = 0$$

on ne pourra conclure que $x = 0$.

Nous avons admis qu'il existait toujours un nombre positif qui, élevé au carré, reproduisait le nombre positif A. Nous avons vu en effet que, s'il n'existait pas de nombre commensurable tel que

$$a^2 = A,$$

on était convenu de définir *racine carrée de* A la limite vers laquelle convergeaient les fractions croissantes dont le carré était inférieur à A. Donc, etc. C. Q. F. D.

Rappelons enfin que le carré d'un binôme $(a + b)$ se compose du carré de a, du double produit de a par b et du

carré de b; c'est ce qu'exprime la formule suivante :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

II. — RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ A UNE INCONNUE.

Nous allons tout d'abord démontrer un théorème qui sera fréquemment employé dans la suite et qui est fondamental dans la théorie des équations du second degré.

THÉORÈME. — *A et B étant tous deux carrés positifs, l'équation*

$$(1) \qquad A = B$$

sera équivalente aux deux suivantes :

$$(2) \qquad \sqrt{A} = \sqrt{B}, \quad \sqrt{A} = -\sqrt{B} \quad \text{ou} \quad \sqrt{A} = \pm\sqrt{B}.$$

En effet, la formule (1) peut s'écrire

$$A - B = 0$$

ou

$$(\sqrt{A} + \sqrt{B})(\sqrt{A} - \sqrt{B}) = 0.$$

Or, le produit $(\sqrt{A} + \sqrt{B})(\sqrt{A} - \sqrt{B})$ ne peut s'annuler que si l'un de ses facteurs est nul, et, réciproquement, il s'annule dès que l'un de ceux-ci est nul; les valeurs des inconnues qui satisfont à (1) satisfont donc à (2), et *vice versa*.

La forme la plus générale sous laquelle peut se présenter l'équation du second degré est

$$(3) \qquad ax^2 + bx + c = 0,$$

a désignant une quantité essentiellement différente de zéro; b et c sont d'ailleurs quelconques. Pour résoudre cette équation, on commence ordinairement par diviser

chacun des coefficients par a (*), puis on pose

$$(4) \qquad \frac{b}{a} = p, \quad \frac{c}{a} = q;$$

elle prend alors la forme

$$(5) \qquad x^2 + px + q = 0.$$

Si l'on observe alors que $x^2 + px$ sont les deux premiers termes du carré de $x + \frac{p}{2}$ ordonné par rapport aux puissances décroissantes de x, l'équation précédente pourra s'écrire

$$(6) \qquad \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2}{4} + q = 0,$$

ou bien, en faisant passer les termes connus dans le second

(*) On peut résoudre directement l'équation (1) de la manière suivante : on la met sous la forme

$$\left(x\sqrt{a} + \frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c = 0,$$

et l'on vérifie aisément, en développant le carré indiqué, l'identité de cette formule avec l'équation (1). On déduit immédiatement de là

$$\left(x\sqrt{a} + \frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a},$$

puis

$$x\sqrt{a} + \frac{b}{2\sqrt{a}} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2\sqrt{a}},$$

ou

$$x\sqrt{a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2\sqrt{a}},$$

ou enfin

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

membre,

$$(7)\qquad \left(x+\frac{p}{2}\right)^2=\frac{p^2}{4}-q.$$

Jusqu'ici nous n'avons fait subir à l'équation (3) que des transformations incapables d'altérer la valeur des racines.

Appliquons le théorème démontré au commencement de ce paragraphe en observant que la racine du premier membre est $x+\frac{p}{2}$; nous aurons, au lieu de la formule (7),

$$(8)\qquad x+\frac{p}{2}=\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}.$$

Mais on peut arriver directement à ce résultat en faisant observer que $x+\frac{p}{2}$ élevé au carré, devant reproduire $\frac{p^2}{4}-q$, est par définition la racine carrée de cette quantité. Or cette racine a deux valeurs $+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$ et $-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$; en sorte que l'on a

$$(9)\qquad x+\frac{p}{2}=\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q},$$

pourvu toutefois que $\frac{p^2}{4}-q$ soit positif ou nul. Dans le cas où $\frac{p^2}{4}-q$ serait négatif, l'équation (7) et par suite l'équation (3) n'auraient pas de racines, car il n'existe pas de quantité $x+\frac{p}{2}$ dont le carré soit négatif.

De l'équation (9) on tire enfin

$$(10)\qquad x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}.$$

Si l'on remplace p et q par leurs valeurs (4), il vient

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}$$

ou bien

$$(11) \qquad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Les formules (10) et (11) sont d'un fréquent usage dans l'Analyse; nous allons en donner immédiatement quelques applications.

Première application. — *Résoudre l'équation*

$$x^2 - 4x + 3 = 0.$$

Nous assimilerons cette équation à l'équation (5), nous ferons $p = -4$, $q = 3$, et, en appliquant la formule (10), nous trouverons

$$x = 2 \pm \sqrt{4 - 3}$$

ou

$$x = 2 \pm 1;$$

ainsi l'une des racines est 3, l'autre 1, ce que l'on peut vérifier *a posteriori*.

Nous avons vu que, si $\frac{p^2}{4} - q$ était négatif, l'équation du second degré n'admettait pas de racines. La formule (10), dans ce cas, ainsi que la formule (11), deviennent absurdes, en sorte que ces formules mêmes, lorsqu'on cherchera à les appliquer, indiqueront l'absence de racines.

Deuxième application. — *Résoudre l'équation*

$$x^2 - 2x + 7 = 0.$$

La formule (10) donne

$$x = 1 \pm \sqrt{1 - 7}$$

ou bien

$$x = 1 \pm \sqrt{-6};$$

ce résultat montre que l'équation considérée n'a pas de racines.

TROISIÈME APPLICATION. — *Résoudre l'équation*

$$x^2 + 7x + 10 = 0.$$

Nous pourrions encore appliquer la formule (10); mais, comme nous introduirions ainsi des fractions, le coefficient de x n'étant pas divisible par 2, c'est à la formule (11) que nous aurons recours. Nous assimilerons alors l'équation proposée à l'équation (3); nous ferons $a = 1$, $b = 7$, $c = 10$. Nous aurons alors

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 40}}{2},$$

$$x = \frac{-7 \pm 3}{2},$$

c'est-à-dire

$$x = -5 \quad \text{ou} \quad x = -2.$$

QUATRIÈME APPLICATION. — *Résoudre l'équation*

$$36x^2 - 12x + 1 = 0.$$

Il faut faire, dans la formule (11), $a = 36$, $b = -12$, $c = 1$; il vient alors

$$x = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 144}}{72}$$

ou

$$x = \frac{12}{72} = \frac{1}{6};$$

ici nous ne trouvons qu'une racine.

Avec un peu d'habitude, on simplifie mentalement la formule (11) lorsque b est divisible par 2, et alors c'est la formule

$$(12) \qquad x = \frac{-\left(\frac{b}{2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac}}{a},$$

obtenue en divisant par 2 les deux termes de la fraction qui entre dans le second membre de la formule (11), que l'on applique.

Cinquième application. — *Résoudre l'équation*

$$4x^2 - 8x + 3 = 0.$$

La formule (12) donne

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{4},$$

ou

$$x = \frac{4 \pm 2}{4},$$

ou

$$x = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad x = \frac{3}{2}.$$

L'application de la formule (11) aurait donné des chiffres plus gros; ainsi on aurait trouvé

$$x = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 48}}{8}.$$

III. — DISCUSSION DES RACINES DE L'ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ.

Reprenons l'équation

$$(1) \qquad x^2 + px + q = 0.$$

Nous avons trouvé que les racines étaient données par la formule

$$(2) \qquad x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Nous avons vu que, si la quantité $\frac{p^2}{4} - q$ était négative, il n'y avait pas de racines, et alors la formule (2) devient absurde; on convient dans ce cas de dire que les racines de l'équation (1) sont *imaginaires*.

Lorsque la quantité $\frac{p^2}{4} - q$ est nulle, l'équation (1) n'admet qu'une seule racine; elle est égale à $-\frac{p}{2}$. On convient de dire que l'équation (1) a *deux racines égales* à $-\frac{p}{2}$.

Enfin, lorsque $\frac{p^2}{4} - q$ est positif, on a deux racines dites *réelles et inégales*. On peut observer à ce propos que, si la quantité q est négative, l'équation (1) a toujours deux racines réelles et inégales, car alors $\frac{p^2}{4} - q$ sera toujours positif.

Lorsque la quantité q est négative, ou, si l'on veut, quand dans l'équation

$$(3) \qquad ax^2 + bx + c = 0$$

c et a sont de signes contraires, il y a forcément une racine positive et une négative, car dans la formule (2) le radical a une valeur absolue plus grande que $-\frac{p}{2}$.

Lorsque, les racines restant réelles, q est positif, on voit que les racines seront de même signe, car alors la valeur absolue du radical dans la formule (2) est moindre que

$-\frac{p}{2}$. Si p est positif, elles seront négatives ; sinon, elles seront positives.

Si nous désignons par x' et x'' les racines de l'équation (1), nous aurons

$$x' = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q},$$
$$x'' = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

En ajoutant ces deux formules membre à membre, on trouve

$$x' + x'' = -p.$$

En les multipliant membre à membre, on trouve

$$\begin{aligned} x'x'' &= \left(-\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right)\left(-\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right) \\ &= \left(-\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right)^2 \\ &= \frac{p^2}{4} - \left(\frac{p^2}{4} - q\right) = q. \end{aligned}$$

On peut donc énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME. — *La somme des racines de l'équation* (1) *est égale à* $-p$; *leur produit est égal à* q.

Ou, ce qui revient au même :

La somme des racines de l'équation (3) *est égale à* $-\frac{b}{a}$, *leur produit à* $\frac{c}{a}$.

Si donc on se proposait de former une équation du second degré admettant pour racines deux nombres donnés

x' et x'', il suffirait d'écrire

$$x^2 - (x' + x'')x + x'x'' = 0.$$

Du reste, en résolvant cette équation, on trouve

$$x = \frac{x' + x'' \pm \sqrt{(x' + x'')^2 - 4x'x''}}{2}$$

ou

$$x = \frac{x' + x''}{2} \pm \frac{x' - x''}{2},$$

c'est-à-dire

$$x = x' \quad \text{et} \quad x = x''.$$

Il arrive dans certaines questions que l'on connaît la somme s de deux quantités x' et x'' ainsi que leur produit P; pour déterminer ces quantités, il suffit d'observer qu'elles sont racines de l'équation du second degré

$$(4) \qquad x^2 - sx + P = 0.$$

En effet, la somme des racines de cette équation est s, leur produit est P; du reste, il est facile de prouver que l'équation (4) fournit la solution complète du problème. En effet, si l'on pose

$$x' + x'' = s,$$
$$x'x'' = P,$$

on voit, par la première de ces équations, que

$$x'' = s - x',$$

et, par conséquent, la seconde peut s'écrire

$$x'(s - x') = P$$

ou bien

$$x'^2 - sx' + P = 0,$$

ce qui prouve que x' est une racine de l'équation (4). On verrait de même que x'' est racine de la même équation.

Si l'on donnait

$$x' - x'' = d,$$
$$x'x'' = P,$$

x' et $-x''$ seraient racines de l'équation

$$x^2 - dx - P = 0.$$

Exemple. — *Trouver deux nombres dont la somme fasse 12 et dont le produit fasse 27.*

Ces deux nombres sont les racines de l'équation

$$x^2 - 12x + 27 = 0,$$

d'où l'on tire

$$x = 6 \pm \sqrt{36 - 27},$$
$$x = 6 \pm 3,$$

et, par suite, les nombres cherchés sont 9 et 3.

IV. — DISCUSSION DU TRINOME $ax^2 + bx + c$.

Proposons-nous d'étudier la manière dont varie le trinôme

(1) $$y = ax^2 + bx + c$$

lorsque l'on fait croître x depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$.

Si nous posons, comme plus haut,

$$\frac{b}{a} = p, \quad \frac{c}{a} = q,$$

la formule (1) donne successivement

$$y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right),$$

(2) $$y = a(x^2 + px + q).$$

Nous distinguerons trois cas :

1° $\frac{p^2}{4} - q > 0$. *L'équation $y = 0$ a ses racines réelles et inégales*. Dans ce cas, la formule (2) donne

$$y = a\left[\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2}{4} + q\right]. \tag{3}$$

$\frac{p^2}{4} - q$ étant positif, on peut le poser égal à λ^2, et la formule précédente donne

$$y = a\left[\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \lambda^2\right]. \tag{4}$$

Cette égalité montre que le trinôme y est la différence de deux carrés ; ces carrés sont $\left[\left(x + \frac{p}{2}\right)\sqrt{\pm a}\right]^2$ et $(\lambda\sqrt{\pm a})^2$, le signe $+$ placé sous le radical convenant au cas où a est positif et le signe $-$ au cas où il est négatif.

Le trinôme y peut encore se mettre sous une autre forme. L'équation (3) peut s'écrire

$$y = a\left[\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right)^2\right]$$

ou

$$y = a\left(x + \frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right)\left(x + \frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right),$$

c'est-à-dire, en désignant par x' et x'' les racines de l'équation $y = 0$,

$$y = a(x - x')(x - x''). \tag{5}$$

Ainsi le trinôme y, dans le cas que nous examinons, est le produit de deux binômes du premier degré. Si nous identifions cette valeur de y avec celle que fournit la for-

mule (2), il vient

$$x^2 + px + q = (x - x')(x - x'')$$

ou bien

$$x^2 + px + q = x^2 - (x' + x'')x + x'x''.$$

Cette relation ayant lieu quel que soit x, on a (Chap. III, p. 44)

$$-p = (x' + x''), \quad q = x'x''.$$

Nous retrouvons les relations démontrées page 164.

Cela posé, supposons $a > 0$, et reprenons la formule (4):

$$(4) \qquad y = a\left[\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \lambda^2\right].$$

Si nous faisons varier x depuis $-\infty$ jusqu'à $-\frac{p}{2}$, y va décroître, car le seul terme variable $\left(x + \frac{p}{2}\right)^2$ décroît et s'annule pour $x = -\frac{p}{2}$. Si nous continuons à faire croître x, le terme $\left(x + \frac{p}{2}\right)^2$ va croître et repassera, pour des valeurs de x équidistantes de $-\frac{p}{2}$, par les mêmes valeurs que précédemment, en sorte que la plus petite valeur que peut prendre y correspond à $x = -\frac{p}{2}$, demi-somme des racines de l'équation $y = 0$. Cette valeur est $-a\lambda^2$; du reste, pour $x = \pm\infty$, y est égal à l'infini.

Pour $a = 0$, y est toujours nul.

Enfin, pour $a < 0$, il est facile de voir, sans recommencer la discussion, que y croît depuis $-\infty$ jusqu'à $-a\lambda^2$ lorsque x varie de $-\infty$ à $-\frac{p}{2}$, puis décroît depuis $-a\lambda^2$ jusqu'à $-\infty$ lorsque x varie de $-\frac{p}{2}$ + à ∞.

2° *Supposons* $\frac{p^2}{4} - q = 0$. *L'équation* $y = 0$ *a ses racines égales*. Dans ce cas, on peut écrire, comme plus haut,

$$y = a(x^2 + px + q) = a\left[\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p^2}{4} - q\right)\right].$$

Mais, comme $\frac{p^2}{4} - q = 0$,

$$y = a\left(x + \frac{p}{2}\right)^2.$$

Le trinôme y est donc un carré parfait si a est positif et un carré parfait pris en signe contraire si a est négatif.

x variant de $-\infty$ à $-\frac{p}{2}$, demi-somme des racines, y décroît si a est positif, croît dans le cas contraire; x variant de $-\frac{p}{2}$ $+$ à ∞, y croît si a est positif et décroît dans le cas contraire.

3° *Supposons* $\frac{p^2}{4} - q < 0$. *L'équation* $y = 0$ *a ses racines imaginaires*. On a toujours

$$y = a\left[\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2}{4} + q\right].$$

Mais, comme $\frac{p^2}{4} - q < 0$, on peut poser

$$-\frac{p^2}{4} + q = -\left(\frac{p^2}{4} - q\right) = \lambda^2;$$

il vient alors

$$y = a\left[\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \lambda^2\right],$$

et dans ce cas on voit que y est, au signe près, la somme de deux carrés dont l'un ne contient pas la quantité x; aussi y ne peut-il s'annuler pour aucune valeur attribuée

à cette lettre : c'est ce qui explique pourquoi, dans ce cas, l'équation $y = 0$ n'a pas de racines.

Les variations de y s'étudient dans ce cas comme dans le premier; de cette discussion résultent plusieurs faits importants :

1° Si l'équation $y = 0$ a ses racines réelles, le trinôme y passe deux fois par zéro; il est de même signe que son premier terme ax^2 quand x n'est pas compris entre les racines, ce qui peut se voir sur la formule

$$y = a(x - x')(x - x'').$$

Il est de signe contraire à son premier terme quand x varie entre les racines x', x''; enfin il est la différence de deux carrés.

2° Si l'équation $y = 0$ a ses racines égales, le trinôme y est toujours de même signe que son premier terme ax^2, excepté lorsque x devient égal à l'une des racines; il est un carré parfait.

3° Si l'équation $y = 0$ a ses racines imaginaires, le trinôme y conserve toujours le signe de son premier terme; il est, au signe près, égal à la somme de deux carrés.

Dans tous les cas le trinôme atteint sa plus grande ou sa plus petite valeur ou, comme l'on dit, son *maximum* ou son *minimum*, pour $x = -\frac{p}{2}$.

Nous venons de voir que, dans le cas où le trinôme

$$y = ax^2 + bx + c$$

égalé à zéro avait ses racines égales, il était un carré parfait, du moins au signe près. Il est facile de démontrer que :

Pour qu'un trinôme du second degré soit un carré parfait, il faut que, égalé à zéro, l'équation résultante ait ses racines égales.

En effet, ax^2+bx+c ne peut être que le carré d'un binôme. Soit $mx+n$ ce binôme; on doit avoir

$$ax^2+bx+c=(mx+n)^2.$$

Or, en égalant $(mx+n)^2$ à zéro, on trouve deux racines égales. Du reste, la formule précédente donne

$$ax^2+bx+c=m^2x^2+2mnx+n^2,$$

et, en identifiant,

$$m^2=a, \quad 2mn=b, \quad n^2=c.$$

On déduit de là

$$m=\sqrt{a} \quad \text{et} \quad n=\sqrt{c},$$

et par suite

$$ax^2+bx+c=(x\sqrt{a}+\sqrt{c})^2.$$

En remplaçant dans l'équation

$$2mn=b$$

m et n par leurs valeurs $\sqrt{a}$ et $\sqrt{c}$, on a

$$2\sqrt{ac}=b,$$

ou bien, en élevant au carré,

$$4ac=b^2, \quad b^2-4ac=0.$$

Nous retrouvons ainsi par une autre voie la condition qui doit être satisfaite pour que l'équation

$$ax^2+bx+c=0$$

ait ses racines égales.

V. — EXAMEN DU CAS OU LE COEFFICIENT x^2 EST TRÈS-PETIT.

La formule

(1) $$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

qui donne les racines de l'équation

$$(2)\qquad ax^2+bx+c=0,$$

a été démontrée pour toutes les valeurs de a différentes de zéro. Il est intéressant de rechercher ce qu'elle devient quand on y introduit l'hypothèse $a=0$, qui fait disparaître l'une des racines de l'équation (2) en l'abaissant au premier degré; en d'autres termes, nous allons voir ce que devient la racine qui disparaît pour $a=0$. Si l'on introduit directement zéro à la place de a dans la formule (1), les racines

$$(3)\qquad x'=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

$$(4)\qquad x''=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

prennent respectivement les formes illusoires

$$x'=\frac{0}{0},\quad x''=\frac{-2b}{0}.$$

Ces formules ne nous apprennent rien; mais, si nous multiplions les deux termes de la fraction qui représente la valeur de x', formule (3), par $-b-\sqrt{b^2-4ac}$, et les deux termes de la fraction qui représente la valeur de x'', formule (4), par $-b+\sqrt{b^2-4ac}$, en observant que l'on a

$$(u-v)(u+v)=u^2-v^2,$$

on trouve

$$x'=\frac{4ac}{2a(-b-\sqrt{b^2-4ac})},$$

$$x''=\frac{4ac}{2a(-b+\sqrt{b^2-4ac})};$$

ou simplement, en supprimant le facteur commun $2a$,

$$x' = \frac{2c}{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}, \quad x'' = \frac{2c}{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}.$$

Si l'on fait alors tendre a vers zéro, on voit que $\sqrt{b^2 - 4ac}$ tend vers b; par suite, x' tend vers $-\frac{c}{b}$, racine de l'équation

$$bx + c = 0,$$

tandis que x'' augmente indéfiniment. Ainsi, en employant un langage figuré dont nous avons fait connaître le sens (p. 116), on peut dire que pour $a = 0$ l'une des racines de l'équation (2) devient infinie et que l'autre est égale à $-\frac{c}{b}$.

VI. — DES ÉQUATIONS BICARRÉES.

On appelle *équations bicarrées* les équations de la forme

$$(1) \qquad ax^4 + bx^2 + c = 0;$$

elles se ramènent immédiatement aux équations du second degré en prenant x^2 pour inconnue. On en conclut

$$x = \pm\sqrt{\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}.$$

Une équation bicarrée aura donc en général quatre racines. Si $b^2 - 4ac < 0$, elle n'aura pas de racines, car alors il n'existe pas de valeur pour x^2 qui satisfasse à l'équation (1). Si l'une des quantités comprises dans la formule

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

est négative, l'équation n'aura que deux racines; si elles sont négatives toutes deux, l'équation (1) n'aura pas de racines.

Nous allons faire connaître une formule qui permet de simplifier dans bien des cas le calcul des racines de l'équation (1); les racines de cette équation sont de la forme

$$\sqrt{A+\sqrt{B}}.$$

Le problème que nous allons nous proposer de résoudre est celui-ci :

PROBLÈME. — A *et* B *étant censés rationnels, on demande de trouver deux nombres u et v rationnels satisfaisant à la relation*

$$(2) \qquad \sqrt{A+\sqrt{B}} = \sqrt{u} + \sqrt{v}.$$

Remarquons auparavant que, si l'on a

$$m + \sqrt{n} = m' + \sqrt{n'},$$

m, n, m', n' désignant des nombres rationnels, on aura forcément

$$m = m', \quad n = n',$$

si $\sqrt{n}$ et $\sqrt{n'}$ ne sont pas commensurables. En effet,

$$\sqrt{n} = (m' - m + \sqrt{n'}),$$

et, en élevant au carré,

$$(3) \qquad n = (m'-m)^2 + n' + 2\sqrt{n'}(m'-m).$$

Or le produit $2\sqrt{n'}(m'-m)$ sera incommensurable tant que $m - m'$ ne sera pas nul, car, si ce nombre était commensurable, on pourrait poser

$$2\sqrt{n'}(m'-m) = \frac{\mu}{\nu},$$

μ et ν étant des nombres entiers, d'où

$$\sqrt{n'} = \frac{\mu}{\nu} : 2(m' - m).$$

$\sqrt{n'}$ serait donc égal à un nombre commensurable, ce qui est contre notre hypothèse. Mais alors, si $m \gtrless m'$, le second membre de la formule (3) est incommensurable, le premier ne l'est pas; donc il faut que l'on ait $m = m'$, et par suite $n = n'$.

Cela posé, revenons à la formule (2). En élevant au carré, on a

$$A + \sqrt{B} = u + v + 2\sqrt{uv},$$

d'où nous concluons

$$A = u + v, \quad \sqrt{B} = 2\sqrt{uv} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{4}B = uv.$$

Nous ferons ensuite observer que, si le radical $\sqrt{B}$ est pris avec le signe —, les radicaux $\sqrt{u}$ et $\sqrt{v}$ devront être pris avec des signes contraires. On connaît ainsi la somme et le produit de u et v; ces quantités (p. 164) sont donc racines de l'équation du second degré

$$x^2 - Ax + \frac{B}{4} = 0.$$

On en déduit

$$u \quad \text{ou} \quad v = \frac{A \pm \sqrt{A^2 - B}}{2},$$

et par suite

$$(4) \qquad \sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}} \pm \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}}.$$

Cette formule résoudra le problème toutes les fois que $A^2 - B$ sera un carré parfait. Toutefois, nous ferons observer que la formule (4) est une identité et qu'elle a lieu

dans le cas où les nombres A et B sont tout à fait quelconques. En effet, les deux nombres u et v ont été déterminés par la condition de satisfaire aux formules

$$u + v = A, \quad uv = \frac{1}{4} B,$$

qui satisfont à la condition

$$u + v \pm 2\sqrt{uv} = A \pm \sqrt{B},$$

c'est-à-dire

$$\sqrt{u} \pm \sqrt{v} = \sqrt{A \pm \sqrt{B}},$$

quels que soient A et B. Du reste, la formule (4) se vérifie aisément en élevant ses deux membres au carré.

Exemple. — Résoudre l'équation

$$x^4 + px^2 + q = 0.$$

On a

$$x = \pm\sqrt{-\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}}.$$

Appliquons au calcul de x la formule (4). Pour cela, il faut faire dans cette formule

$$A = -\frac{p}{2}, \quad B = \frac{p^2}{4}, \quad A^2 - B = q;$$

il vient alors

$$x = \pm\left(\sqrt{-\frac{p}{4} + \frac{1}{2}\sqrt{q}} \pm \sqrt{-\frac{p}{4} - \frac{1}{2}\sqrt{q}}\right).$$

La transformation en question réussira donc toutes les fois que q sera un carré parfait; ainsi l'équation

$$x^4 - 24x^2 + 36 = 0$$

donnera

$$x = \pm(\sqrt{6+3} \pm \sqrt{6-3})$$

ou

$$x = \pm(3 \pm \sqrt{3}).$$

VII. — PROPRIÉTÉ REMARQUABLE DU TRINOME $x^4 + px^2 + q$.

Le trinôme $x^4 + px^2 + q$ peut toujours se mettre sous la forme d'un produit de deux trinônes du second degré. Ceci est évident lorsque les racines de l'équation

$$x^4 + px^2 + q = 0$$

sont réelles, en considérant x^2 comme l'inconnue; alors, en effet, en désignant par x' et x'' ces racines, on a

$$x^4 + px^2 + q = (x^2 - x')(x^2 - x'').$$

Supposons donc x' et x'' imaginaires; alors on a

$$(1) \qquad \frac{p^2}{4} - q < 0.$$

D'un autre côté, en considérant x^4 et q comme les termes extrêmes d'un carré, on a

$$(2) \qquad x^4 + px^2 + q = (x^2 + \sqrt{q})^2 + (p - 2\sqrt{q})x^2.$$

Mais de la relation (1) on tire successivement, en observant que $q > 0$,

$$p^2 < 4q,$$

$$p < 2\sqrt{q},$$

$$p - 2\sqrt{q} < 0.$$

Si p est négatif, cette formule sera satisfaite d'elle-même. La formule (2) peut alors s'écrire

$$x^4 + px^2 + q = (x^2 + \sqrt{q})^2 - x^2\left(\sqrt{2\sqrt{q} - p}\right)^2$$

ou bien

$$x^4+px^2+q$$
$$=\left(x^2+\sqrt{q}-x\sqrt{2\sqrt{q}-p}\right)\left(x^2+\sqrt{q}+x\sqrt{2\sqrt{q}-p}\right).$$

C. Q. F. D.

APPLICATIONS. — On a

$$x^4-1=(x^2+1)(x^2-1),$$
$$x^4+1=\left(x^2+1-x\sqrt{2}\right)\left(x^2+1+x\sqrt{2}\right).$$

VIII. — DES QUESTIONS DE MAXIMUM RÉSOLUBLES PAR DES ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ.

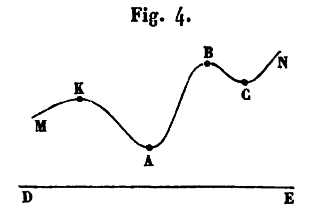
On appelle *maximum* d'une quantité variable une valeur de cette quantité plus grande que celles qui la précèdent ou la suivent *immédiatement*.

On appelle *minimum* d'une quantité variable une valeur de cette quantité plus petite que celles qui la précèdent ou la suivent *immédiatement*.

Comme on voit, le maximum d'une quantité n'est pas la plus grande de toutes ses valeurs; celle-ci porte le nom de *maximum absolu*. On appelle de même *minimum absolu* d'une quantité la plus petite de toutes les valeurs de cette quantité.

Si nous considérons, par exemple, une courbe sinueuse MN (*fig.* 4) et une droite DE situées dans un

Fig. 4.



même plan, la distance d'un point quelconque de MN

à DE est une quantité variable qui est maximum en B et en K, minimum en A et en C. Un minimum, comme on voit, peut être plus grand que certains maxima.

PROBLÈME I. — *Trouver le maximum d'un produit de deux facteurs dont la somme est constante et égale à $2a$.*

Soit x l'une des parties de la somme; l'autre sera $2a - x$, et l'on aura, en désignant par y le produit que l'on veut rendre maximum,

$$y = x(2a - x)$$

ou bien

$$x^2 - 2ax + y = 0,$$

d'où l'on tire

$$x = a \pm \sqrt{a^2 - y}.$$

A l'inspection de cette formule, on voit que la plus grande valeur que puisse prendre y est a^2, car, pour de plus grandes valeurs de y, x n'existerait plus; pour $y = a^2$, on a $x = a$. Ainsi les deux facteurs du produit y sont égaux lorsque ce produit est maximum absolu; du reste, y peut décroître de a^2 à $-\infty$.

PROBLÈME II. — *Trouver le minimum d'une somme de deux facteurs dont le produit est constant et égal à p^2.*

En appelant x l'un des facteurs, l'autre sera $\frac{p^2}{x}$, et, y désignant la somme que l'on veut rendre minimum, on a

$$x + \frac{p^2}{x} = y,$$

ou bien

$$x^2 - xy + p^2 = 0,$$

$$x = \frac{1}{2}y \pm \frac{1}{2}\sqrt{y^2 - 4p^2}.$$

On voit immédiatement que l'on peut faire croître y^2 au delà de toute limite, mais que l'on ne peut pas lui donner de valeurs inférieures à $4p^2$. $y = 2p$ est donc un minimum, $y = -2p$ un maximum ; du reste on a alors

$$x = \frac{1}{2}y = \pm p,$$

et l'on reconnaît que les facteurs doivent être égaux et positifs pour qu'il y ait minimum, égaux et négatifs pour qu'il y ait maximum.

Problème III. — *Trouver les maxima et les minima de la fraction*

$$(1) \qquad y = \frac{ax^2 + bx + c}{mx^2 + nx + p}.$$

Résolvons par rapport à x ; nous aurons successivement

$$x^2(my - a) + x(ny - b) + py - c = 0,$$

$$x = \frac{ny - b \pm \sqrt{(ny - b)^2 - 4(my - a)(py - c)}}{2(my - a)}.$$

Si nous posons alors

$$n^2 - 4mp = \lambda, \quad -2nb + 4mc + 4ap = \mu, \quad b^2 - 4ac = \nu,$$

il vient

$$x = \frac{ny - b \pm \sqrt{\lambda y^2 + \mu y + \nu}}{2(my - a)},$$

formule dans laquelle le trinôme u placé sous le radical devra être positif. Nous aurons trois cas à distinguer :

1° $\mu^2 - 4\lambda\nu > 0$. Le trinôme $\lambda y^2 + \mu y + \nu = u$ peut alors se mettre sous la forme

$$u = \lambda(y - y')(y - y''), \quad \text{où} \quad y' < y''.$$

Si alors λ est positif, le trinôme u ne sera positif que pour toutes les valeurs de y non comprises entre y' et y''; y' sera alors une limite d'accroissement pour y, un maximum. La valeur correspondante de x sera

$$x = \frac{ny' - b}{2(my' - a)}.$$

y'', au contraire, sera un minimum, et la valeur correspondante de x sera

$$x = \frac{ny'' - b}{2(my'' - a)}.$$

Si, au contraire, λ est négatif, u ne sera positif que pour les valeurs de y comprises entre y' et y''; y' sera un minimum, y'' un maximum.

2° Si $\mu^2 - 4\lambda\nu$ est nul, le trinôme u est un carré parfait au facteur λ près; si ce dernier est positif, les valeurs de x prennent la forme

$$x = \frac{Ay + B}{2(my - a)}.$$

Il est clair que y peut passer par tous les états de valeur possibles; il n'y a donc ni maximum ni minimum. Si λ est négatif, on ne peut donner qu'une seule valeur admissible à y, celle qui annule le trinôme u.

3° $\mu^2 - 4\lambda\nu < 0$, dans ce cas, le trinôme u conserve toujours le signe de λ; si donc λ est positif, il n'y a pas de maximum ni de minimum; si λ est négatif, il n'y a pas de valeur admissible pour x : ce cas ne peut pas se présenter. Il est bien clair, en effet, que, si l'on donne à x une certaine valeur dans l'équation (1), il en résultera une autre pour y, et par conséquent, pour certaines valeurs données de y, il existera des valeurs correspondantes pour x.

Revenons au cas où l'on aurait

$$\mu^2 - 4\lambda\nu = 0.$$

Si l'on remplace λ, μ, ν par leurs valeurs, on a

$$\mu^2 - 4\lambda\nu = (4mc + 4ap - 2nb)^2 - 4(n^2 - 4mp)(b^2 - 4ac)$$

ou bien

$$\mu^2 - 4\lambda\nu = 16(m^2c^2 + a^2p^2 + acn^2 + mpb^2 \\ - mnbc - abpn - 2acmp).$$

Si l'on suppose $a = mi$, $b = ni$, $c = pi$, la relation précédente donne

$$\mu^2 - 4\lambda\nu = 0.$$

Nous savons, en effet, qu'alors y conserve une valeur indépendante de x.

Il nous reste à examiner le cas où $\lambda = 0$. Dans ce cas, il y a toujours un maximum ou un minimum donné par la formule

$$y = -\frac{\nu}{\mu}.$$

IX. — SUR QUELQUES QUESTIONS DE MAXIMUM ET DE MINIMUM RÉSOLUES A L'AIDE DE PROCÉDÉS ÉLÉMENTAIRES.

Problème I. — *Trouver le maximum d'un produit de plusieurs facteurs dont la somme est constante.*

Considérons d'abord le cas de deux facteurs a et b. On a

$$ab = \frac{(a+b)^2}{4} - \frac{(a-b)^2}{4}.$$

Laissons la somme $a + b$ constante; il est clair que le premier membre de cette égalité sera maximum quand le

terme soustractif $\frac{(a-b)^2}{4}$ sera minimum. Si donc on peut prendre $a=b$, on aura alors la valeur maximum de ab.

Considérons maintenant un nombre quelconque de facteurs $abc\ldots l$; il est bien clair qu'on ne change pas leur somme en remplaçant a et b par $\frac{a+b}{2}$. Mais, si a et b sont différents, on voit, d'après ce qui précède, que ab sera inférieur à $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$; donc, tant qu'il existera deux facteurs inégaux dans le produit, il ne sera pas maximum; donc enfin le maximum cherché a lieu lorsque tous les facteurs sont égaux.

Remarque. — Il est bon d'observer toutefois que, si la nature de la question que l'on traite ne permet pas de prendre les facteurs égaux, la solution que nous venons de donner doit être modifiée ainsi qu'il suit :

Un produit de plusieurs facteurs dont la somme est donnée est maximum lorsque la différence entre deux facteurs quelconques est la plus petite possible.

On peut conclure de là le théorème suivant :

Théorème. — *La moyenne arithmétique de plusieurs quantités $a, b, c, \ldots, l$ est plus grande que leur moyenne géométrique.*

En effet, $\left(\frac{a+b+c+\ldots+l}{n}\right)^n$ est un produit de n facteurs égaux tels que $\frac{a+b+c+\ldots+l}{n}$, dont la somme est $a+b+\ldots+l$; ce produit est donc la plus grande valeur que puisse prendre le produit $abc\ldots l$ sans que la

somme de ses facteurs cesse de conserver sa valeur; donc

$$\left(\frac{a+b+c+\ldots+l}{n}\right)^n > abc\ldots l$$

ou

$$\frac{a+b+c+\ldots+l}{n} > \sqrt[n]{abc\ldots l}.$$

C. Q. F. D.

PROBLÈME II. — *Trouver le minimum d'une somme de termes dont le produit est constant.*

Nous considérerons d'abord deux termes a et b; nous aurons alors

$$a+b=\sqrt{(a-b)^2+4ab}.$$

On voit immédiatement que, ab étant constant, $a+b$ sera d'autant plus petit que $(a-b)$ sera plus petit; si donc on peut prendre $a=b$, $a+b$ sera minimum.

En raisonnant comme dans le problème précédent, on démontre facilement que *le minimum d'une somme de termes dont le produit est constant a lieu lorsque ces facteurs sont égaux ou ont entre eux des différences aussi petites que possible.*

PROBLÈME III. — $x+y+z+\ldots$ *est constant : trouver le maximum de*

$$x^m y^n z^p\ldots,$$

expression dans laquelle $m, n, p, \ldots$ *sont des nombres constants.*

Il est clair que le maximum de $x^m y^n z^p\ldots$ a lieu en même temps que celui de

$$\left(\frac{x}{m}\right)^m \left(\frac{y}{n}\right)^n \left(\frac{z}{p}\right)^p\ldots.$$

Mais l'expression précédente est le produit de

$$m + n + p + \ldots$$

facteurs dont la somme est égale à $x + y + z + \ldots$, c'est-à-dire constante; le maximum aura donc lieu quand ces facteurs seront égaux ou quand

$$\frac{x}{m} = \frac{y}{n} = \frac{z}{q} = \ldots.$$

On verrait de même que ces égalités constituent la condition pour que $x + y + \ldots$ soit minimum quand $x^m y^n z^p \ldots$ est constant.

PROBLÈME IV. — *Trouver le cône maximum inscrit dans une sphère de rayon donné.*

Si l'on désigne par a le rayon de la sphère, par x le rayon de la base et par y la hauteur du cône, la quantité qu'il faut rendre maximum a pour expression $\frac{1}{3}\pi x^2 y$ ou simplement $x^2 y$. Or on trouve facilement entre x et y la relation

$$x^2 = y(2a - y).$$

Si l'on remplace alors x^2 dans l'expression à rendre maximum par la valeur que nous venons de trouver, elle devient

$$y^2(2a - y).$$

Or la somme des facteurs y, $2a - y$ est constante et égale à $2a$; il y aura donc maximum (*voir* le problème précédent) lorsque l'on aura

$$\frac{y}{2} = 2a - y,$$

ou

$$y = \frac{4}{3}a, \quad x = \frac{2}{3}a\sqrt{2}.$$

Problème V. — *Trouver le cône minimum circonscrit à une sphère de rayon donné a.*

Soient x le rayon de la base, y la hauteur du cône ; la quantité à rendre minimum est toujours

$$(1) \qquad x^2 y = z.$$

Si du centre de la sphère on abaisse une perpendiculaire sur l'une des génératrices du cône, on obtient une figure dans laquelle deux triangles semblables qu'il est aisé d'apercevoir donnent la relation

$$\frac{y - a}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{a}{x} \quad \text{ou} \quad \frac{(y-a)^2}{x^2 + y^2} = \frac{a^2}{x^2}.$$

Si nous résolvons par rapport à x^2, il vient

$$x^2 = \frac{a^2 y^2}{(y-a)^2 - a^2} = \frac{a^2 y^2}{y^2 - 2ay}.$$

En multipliant par y et en ayant égard à l'équation (1), il vient

$$z = \frac{a^2 y^3}{y^2 - 2ay}.$$

Or z sera minimum quand

$$\frac{1}{z} = \frac{y^2 - 2ay}{a^2 y^3}$$

sera maximum. Or cette dernière expression peut s'écrire

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{2a^3} \frac{2a}{y}\left(1 - \frac{2a}{y}\right).$$

Si l'on observe que $\frac{1}{2a^3}$ est constant et que la somme des facteurs $\frac{2a}{y}$ et $1-\frac{2a}{y}$ est constante, $\frac{1}{z}$ sera maximum, et par suite z minimum, lorsque l'on aura

$$\frac{2a}{y}=1-\frac{2a}{y} \quad \text{ou} \quad y=4a.$$

Cette donnée suffit pour construire le cône minimum.

NOTES ET EXERCICES.

1. On a employé deux ouvriers gagnant des salaires différents : le premier, ayant été payé au bout d'un certain nombre de jours, a reçu 96 francs, et le second, ayant travaillé six jours de moins, n'a eu que 54 francs; s'il avait travaillé tous les jours, et que l'autre eût manqué six jours, ils auraient reçu tous les deux la même somme. On demande combien de jours chacun d'eux a travaillé et le prix de sa journée.

2. On remet à un banquier deux billets sur la même personne, le premier de 550 francs, payable dans sept mois, le second de 720 francs, payable dans quatre mois, et il donne pour le tout une somme de 1200 francs. On demande quel est le taux annuel de l'intérêt d'après lequel ces billets ont été escomptés.

3. Dans quelle direction faut-il lancer une bille de billard pour qu'après deux réflexions elle vienne repasser par le point de départ? On supposera l'angle d'incidence égal à l'angle de réflexion; on supposera le billard circulaire (dans ce cas la solution dépendra d'une équation du troisième degré dont on connaît *à priori* une racine, ce qui permet de la ramener au second); on supposera aussi le billard composé de deux bandes rectilignes indéfinies (pour que le problème soit possible dans ce cas, il faut que l'angle des bandes soit aigu).

4. Trouver sur une droite donnée un point tel que la somme des carrés de ses distances à d'autres points donnés sur cette droite soit

égale à un nombre donné m. Discuter le problème et dire quelle est la plus petite valeur que l'on puisse adopter pour m.

5. Trouver sur une droite donnée AB un point M également éclairé de deux lumières, d'intensités a et b, placées en A et B respectivement.

6. Trouver deux nombres connaissant leur moyenne arithmétique et leur moyenne géométrique. Conclure de la discussion que la moyenne arithmétique de deux nombres est plus grande que leur moyenne géométrique.

7. Résoudre les équations

$$(1)\quad \begin{cases} x^2+y^2=a^2, \\ xy=b^2, \end{cases} \qquad (2)\quad \begin{cases} x^2+y^2=a^2, \\ x\pm y=b, \end{cases}$$

$$(3)\quad \begin{cases} x^3-y^3=a^3, \\ x-y=b, \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2-y^2=a^2, \\ xy=b^2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2, \\ xy+yz+zx=b^2, \\ x+y-z=c, \end{cases} \qquad \begin{cases} x-y=a, \\ xy=b^2. \end{cases}$$

Pour résoudre (1), on remarque que x^2 et y^2 sont racines de

$$z^2-a^2z+b^4=0;$$

(2) se ramène à (1) en élevant la seconde équation au carré et en retranchant la première; (3) se résout en divisant la première équation du système par la seconde.

8. Résoudre en nombres entiers l'équation $z^2=x^2+y^2$.

Solution. — On a $x^2=(z+y)(z-y)$; on pose alors $z+y=a^2$, $z-y=b^2$, a^2 et b^2 étant des carrés de même parité, afin que

$$z=\frac{a^2+b^2}{2} \quad \text{et} \quad y=\frac{a^2-b^2}{2}$$

soient entiers.

Exemples :

$$a=1,\quad b=3;\quad \text{alors}\quad y=4,\quad z=5,\quad x=3,$$
$$a=2,\quad b=4;\quad \text{»}\quad y=6,\quad z=10,\quad x=8.$$

9. Pour résoudre une inégalité de la forme

$$ax^2 + bx + c > 0 \quad \text{ou} \quad < 0,$$

on observe que $ax^2 + bx + c$ est de même signe ou de signe contraire à son premier terme selon que x est compris en dehors ou dans l'intervalle compris entre les racines. Cela posé, résoudre les inégalités

$$x^2 - 4x + 1 > 5,$$
$$x^2 + x + 1 > 0,$$
$$(x-a)(x-b) > c,$$

ou montrer qu'elles ne peuvent pas être satisfaites.

10. Résoudre l'inégalité

$$\frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'} \gtrless \alpha.$$

On ne chassera pas le dénominateur; pourquoi serait-ce une faute? On fera passer α dans le premier membre, et l'on sera ramené à résoudre une inégalité de la forme

$$(1) \qquad \frac{Ax^2 + Bx + C}{a'x^2 + b'x + c'} \gtrless 0.$$

Pour résoudre cette inégalité, on décomposera les deux termes de la fraction en facteurs du premier degré, si c'est possible. Si aucun des deux termes de la fraction n'est décomposable en facteurs du premier degré, les racines de ces deux termes seront imaginaires, ces deux termes conserveront toujours le même signe, et l'inégalité (1) sera ou toujours satisfaite ou toujours impossible. Si un seul terme a ses racines imaginaires, il conserve son signe, et l'autre terme change de signe quand x passe par les racines de ce terme égalé à zéro. Soient α, β les racines rangées par ordre de grandeur. Supposons a' et A positifs; la fraction aura le signe + quand x variera de $-\infty$ à α, le signe — quand x variera de α à β, et le signe + quand x variera de β à $+\infty$. Si les deux termes de la fraction sont décomposables en facteurs du premier degré, en appelant α, β, γ, δ les racines des équations $Ax^2 + Bx + C = 0$, $a'x + b'x + c' = 0$ rangées par ordre de grandeur, la fraction aura le signe de Aa' quand x variera de $-\infty$ à α, puis changera successivement de signe seulement pour $x = \beta, \gamma, \delta$.

Résoudre ainsi

$$\frac{x^2+1}{x^2-5x+6}>0, \quad \frac{x^2-3x+2}{2x^2-4x+1}<0, \quad (x+1)(x+2)x(x-1)>0.$$

11. Si $\alpha+\sqrt{\beta}$ est racine d'une équation du second degré à coefficients entiers, α et β désignant des entiers et $\sqrt{\beta}$ une irrationnelle, $\alpha-\sqrt{\beta}$ sera aussi racine de cette équation.

Voici maintenant quelques questions de maximum que l'on résoudra par les procédés indiqués dans le texte.

12. Maxima et minima de

$$x+\frac{1}{x}, \quad x-\frac{1}{x}, \quad x^2+\frac{1}{x^2}, \quad x^2-\frac{1}{x^2}.$$

13. Trouver le maximum ou le minimum de $ax+by$ quand xy est constant, de xy quand $ax+by$ est constant, de x^2+y^2 quand xy ou $x+y$ est constant.

14. Une colonne verticale est surmontée d'une statue : trouver en quel point du terrain, supposé horizontal, il faut se placer pour voir la statue sous un angle maximum (construction géométrique de cet angle). Résoudre le même problème en supposant la surface du terrain sphérique.

15. Étant données deux parallèles AB et CD, une sécante AD et un point B sur l'une d'elles, mener par le point B une sécante BC rencontrant AD en un point O tel que la somme des aires des triangles AOB, COD soit maximum.

16. Trouver le trapèze de périmètre ou de surface maximum ou minimum inscrit dans un demi-cercle, la grande base du trapèze coïncidant avec le diamètre du demi-cercle.

17. Étant donné un angle BAC et un point P situé dans son plan, faire passer par le point P une droite BC telle que l'aire du triangle ABC soit un maximum ou un minimum.

18. Dans un trapèze, trois côtés consécutifs sont égaux : déterminer le quatrième côté, qui est censé être l'une des bases, de telle sorte que l'aire du trapèze soit maximum.

19. On inscrit un rectangle dans un grand cercle de la sphère; on prend ce rectangle pour base d'un prisme droit dont les pans découpent dans la sphère un quadrilatère curviligne : on demande comment doit être choisi le rectangle pour que ce quadrilatère soit maximum.

20. Trouver le cylindre droit à base circulaire de volume ou de surface latérale maximum inscrit dans un cône donné.

21. Trouver le tronc de cône de surface latérale maximum inscrit dans un hémisphère, l'une des bases du tronc étant le grand cercle qui sert de base à l'hémisphère.

Voici maintenant quelques théories facilitant la recherche des maxima et des minima.

22. On trouve facilement le maximum de

$$(ax + a')^m (bx + b')^n (cx + c')^p,$$

où $a, b, c, a', b', c', m, n, p$ sont donnés, au moyen de l'artifice suivant. La quantité à rendre maximum peut être remplacée par

$$(a\alpha x + \alpha a')^m (b\beta x + \beta b')^n (c\gamma x + c'\gamma)^p,$$

α, β, γ étant indépendants de x; si l'on dispose de α, β, γ de telle sorte que

$$\alpha a + \beta b + \gamma c = 0, \tag{1}$$

ce que l'on peut faire d'une infinité de manières, la somme des facteurs de l'expression que nous voulons rendre maximum sera constante, et on la rendra maximum en posant

$$\frac{a\alpha x + a'\alpha}{m} = \frac{b\beta x + b'\beta}{n} = \frac{c\gamma x + c'\gamma}{p}.$$

Ces deux équations et (1) font connaître x et les rapports $\frac{\beta}{\alpha}, \frac{\gamma}{\alpha}$, que l'on n'a pas besoin d'ailleurs de calculer.

Voici un exercice dans lequel on appliquera ce qui vient d'être dit.

23. Étant donnée une sphère, déterminer un petit cercle de telle sorte qu'en le prenant pour base de deux cônes droits ayant leurs sommets sur la sphère la différence des volumes de ces cônes soit maximum (*voir* l'exercice précédent).

24. On trouve facilement le minimum de $\sqrt{x^2 \pm a^2} + \sqrt{y^2 \pm b^2}$ quand $x + y = l$ reste constant; en élevant au carré, on a à rendre minimum $x^2 + y^2 + 2\sqrt{(x^2 \pm a^2)(y^2 \pm b^2)}$. Or $x^2 + y^2 = l^2 - 2xy$; donc on a à rendre mininum

$$l^2 - 2xy - 2\sqrt{(x^2 \pm a^2)(y^2 \pm b^2)}$$

ou à rendre maximum

$$m = xy + \sqrt{(x^2 \pm a^2)(y^2 \pm b^2)}.$$

En remplaçant y par sa valeur $l - x$, en élevant au carré et en faisant les réductions, on a une équation du second degré en x; on la résout et on égale à zéro la quantité placée sous le radical; on arrive ainsi à une équation du troisième degré en m, mais qui se décompose facilement en une équation du premier et du second degré. Ainsi on reconnaît que $m = \pm ab$. Voici deux jolies applications.

25. Trouver le plus court chemin d'un point à un autre en passant par une droite donnée située dans un même plan avec les points donnés (*voir* l'exercice **24**).

26. Trouver sur la droite qui joint les centres de deux cercles un point tel que la somme des tangentes menées de ce point aux deux cercles soit maximum ou minimum (*voir* l'exercice **24**).

27. On a $(x + a)^m + (x - a)^m > 2x^m$: en conclure que, si $X - Y$ est constant, $X^m + Y^m$ est maximum pour $X = Y$. On a aussi

$$\sqrt{x + a} + \sqrt{x - a} > 2\sqrt{x};$$

on peut en déduire une conclusion analogue. (Ce théorème a des applications nombreuses et évidentes.)

Une foule de questions de maximum se simplifient en s'aidant de considérations synthétiques; en voici des exemples.

28. Prouver par l'analyse que de tous les quadrilatères formés avec quatre côtés donnés, le plus grand est inscriptible dans un cercle (on pourra faire usage de la Trigonométrie); en conclure que, de tous les polygones que l'on peut former avec des côtés donnés, le plus grand est inscriptible dans un cercle.

29. On donne un prisme hexagonal régulier et droit. Soient ABCDEF

une de ses bases, A'B'C'D'E'F' l'autre (les sommets A, B, C, D, E, F se succèdent dans l'ordre alphabétique et les arêtes sont AA', BB', ...).

On joint AC, CE, EA; on fait passer des plans également inclinés sur la base par ces droites AC, CE, EA; ces plans se coupent en un point s de la droite qui joint les centres des bases et coupent les arêtes BB', DD', FF' en des points b, d, f. On demande comment il faut mener les plans en question pour que le solide sAbCdEf A'B'C'D'E'F' ait une surface latérale minima. (Deux solides semblables, accolés par leur base A'B'C'D'E'F', forment précisément la figure d'une alvéole d'abeille.) (BUFFON) (*).

30. De tous les polygones ayant le même périmètre et le même nombre de côtés, le plus grand est convexe et régulier.

31. A l'aide de l'application 22, on résoudra encore ce problème : Étant donnée une sphère et un plan P, trouver le cône droit minimum ayant sa base dans le plan P et son axe circonscrit à la sphère. (Prendre pour inconnue l'inverse de la hauteur du cône.)

32. Un quadrilatère inscrit dans un cercle a ses diagonales rectangulaires; le point de rencontre de ces diagonales est fixe : dans quelle position son aire est-elle maximum?

33. Trouver les limites des expressions suivantes pour $x = \infty$:

$$x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right),\quad x\left(\sqrt[3]{x^3+1}-x\right),\quad \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}.$$

34. Inscrire dans un cercle un triangle de périmètre donné et d'aire maximum.

35. Toute section faite dans un tétraèdre parallèlement à deux arêtes opposées est un parallélogramme; de tous ces parallélogrammes quel est le plus grand?

(*) BUFFON, sans être mathématicien, a fait preuve de connaissances étendues en Analyse : il a traduit le *Calcul des fluxions* de Newton, et dans son *Histoire naturelle* il a traité diverses questions relatives au Calcul des probabilités.

36. Trouver le cylindre de révolution de surface totale minimum contenant un volume donné.

37. Parmi tous les cônes de révolution de même volume, trouver celui dont l'arête est la plus petite.

38. Étant donné un triangle, mener une droite minimum qui le partage en deux parties égales.

39. Montrer que la recherche du maximum ou du minimum de $\frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}$, se ramène à celle du maximum ou du minimum de $mx + \frac{1}{x}$.

40. Rendre maxima ou minima les expressions

$$\sin x + \cos x, \quad \sin x - \cos x, \quad \operatorname{tang} x + \cot x.$$

CHAPITRE VIII.

THÉORIE DES PROGRESSIONS ET DES LOGARITHMES.

I. — PROGRESSIONS ARITHMÉTIQUES.

On appelle *progression arithmétique* une suite de termes dans laquelle chacun d'eux est égal au précédent augmenté d'une quantité constante positive ou négative que l'on appelle *raison* de la progression.

Considérons la progression arithmétique

$$(1) \qquad a,\ b,\ c,\ d,\ \ldots,\ k,\ l.$$

Soient r la raison et n le nombre des termes; on aura par définition même

$$b = a + r, \quad c = b + r, \quad \ldots, \quad l = k + r.$$

On voit déjà, d'après cela, que le second terme b est égal au premier plus la raison; le troisième terme c est égal au second b plus la raison, c'est-à-dire au premier plus deux fois la raison; en ajoutant la raison à c, on trouve d : donc le quatrième terme est égal au premier plus trois fois la raison, et, en général, le $n^{\text{ième}}$ terme l est égal à a plus $n - 1$ fois la raison. On peut donc écrire

$$l = a + (n - 1) r,$$

ce qui donne lieu au théorème suivant :

Théorème I. — *Dans toute progression, un terme quelconque est égal au premier (et l'on peut prendre pour*

premier terme celui que l'on veut) plus autant de fois la raison qu'il y a de termes avant lui.

PROBLÈME. — *Trouver la somme des termes d'une progression arithmétique.*

Désignons par s la somme des termes de la progression (1). Nous aurons, en conservant d'ailleurs les mêmes notations que tout à l'heure,

$$(1) \qquad s = a + b + c + \ldots + k + l.$$

Nous pouvons aussi écrire, en renversant l'ordre des termes,

$$(2) \qquad s = l + k + \ldots + c + b + a.$$

Or la suite $l, k, \ldots, c, b, a$ peut être considérée comme une progression arithmétique ayant pour premier terme l et pour raison $-r$. Si l'on considère alors les $i^{\text{ièmes}}$ termes des progressions (1) et (2), on trouve respectivement pour leur expression $a + \overline{i-1}\,r$ et $l - \overline{i-1}\,r$; leur somme est donc $a + l$. Il résulte de là que, si l'on ajoute les formules (1) et (2) terme à terme, la somme des termes de même rang sera toujours $a + l$; on peut donc écrire

$$2s = (a + l) \times n,$$

c'est-à-dire

$$(3) \qquad s = \frac{(a + l)n}{2},$$

formule que l'on peut encore écrire comme il suit, en remplaçant l par sa valeur $a + \overline{n-1}\,r$:

$$s = \frac{(2a + \overline{n-1}\,r)n}{2}.$$

La formule (3) montre que :

THÉORÈME II. — *La somme des termes d'une progres-*

sion arithmétique s'obtient en ajoutant les termes extrêmes et en multipliant le résultat par la moitié du nombre des termes.

Applications. — Les entiers successifs forment une progression arithmétique dont la raison est 1. On a donc ici $a = 1$, $r = 1$, et, en désignant par s la somme de n entiers consécutifs commençant par 1,

$$s = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Les nombres impairs forment aussi une progression arithmétique. La raison est 2, le $n^{\text{ième}}$ nombre impair est $1 + \overline{n-1}.2$ ou $2n - 1$, et l'on trouve, pour la somme des n premiers nombres impairs, n^2.

II. — DES PROGRESSIONS GÉOMÉTRIQUES.

On appelle *progression géométrique* une suite de termes dans laquelle chacun d'eux est égal au précédent multiplié par une quantité constante, que l'on appelle *raison* de la progression.

Considérons la progression géométrique

$$a,\ b,\ c,\ d,\ \ldots,\ k,\ l.$$

Le second terme b est égal au premier multiplié par la raison; pour avoir le troisième terme c, il faut multiplier b par la raison, ou, ce qui revient au même, multiplier a deux fois de suite par la raison; on verrait de même que, pour avoir le quatrième terme, il faut multiplier le premier trois fois de suite par la raison, et d'une manière générale :

Théorème I. — *Un terme quelconque d'une progres-*

sion géométrique s'obtient en multipliant le premier autant de fois par la raison qu'il y a de termes avant lui.

Il résulte de là que, en désignant par q la raison de la progression, ses termes peuvent s'écrire de la manière suivante :

$$a,\ aq,\ aq^2,\ \ldots,\ aq^{n-1}.$$

Si nous désignons par s la somme des termes de cette progression, nous pourrons écrire

$$s = a(1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1}).$$

Or, si l'on se reporte au Chapitre III, p. 40, on reconnaît immédiatement que la quantité écrite entre parenthèses n'est autre chose que le quotient de $q^n - 1$ divisé par $q - 1$, en sorte que l'on a

$$s = a\frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Cette formule peut encore s'écrire

$$s = \frac{lq - a}{q - 1}.$$

On peut trouver la quantité s d'une autre manière, en observant que

$$sq = aq + bq + \ldots + lq$$

ou bien

$$sq = b + c + \ldots + l + lq,$$

d'où l'on conclut

$$sq - s = lq - a,$$

et par suite

$$s = \frac{lq - a}{q - 1}.$$

III. — INSERTION DE MOYENS.

Insérer des *moyens* entre deux nombres a et b, c'est trouver des nombres compris entre a et b et obéissant à certaines lois. Ainsi :

Insérer m *moyens arithmétiques* entre deux nombres a_0 et a_{m+1}, c'est trouver m nombres $a_1, a_2, \ldots, a_m$ tels que

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_m,\ a_{m+1}$$

forment une progression arithmétique. Pour résoudre cette question, il suffit de trouver la raison; or, a_{m+1} étant le $m+2^{\text{ième}}$ terme (puisque entre a_0 et a_{m+1} il y en a m), il est égal au premier a_0 plus $m+1$ fois la raison x. On a donc

$$a_{m+1} = a_0 + (m+1)x,$$

d'où l'on tire la raison

$$x = \frac{a_{m+1} - a_0}{m+1}.$$

La raison une fois connue, on a

$$a_1 = a_0 + x, \quad a_2 = a_0 + 2x,$$

et ainsi de suite.

Insérer m *moyens géométriques* entre a_0 et a_{m+1}, c'est trouver m nombres $a_1, a_2, \ldots, a_m$ tels que la suite

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_m,\ a_{m+1}$$

soit une progression géométrique.

Soit x la raison de la progression inconnue; a_{m+1} est le $m+2^{\text{ième}}$ terme de cette progression. Donc

$$a_{m+1} = a_0 x^{m+1},$$

d'où l'on tire

$$x = \sqrt[m+1]{\frac{a_{m+1}}{a_0}}.$$

La raison une fois connue, on a

$$a_1 = a_0 x, \quad a_2 = a_0 x^2, \quad \ldots.$$

IV. — QUELQUES THÉORÈMES SUR LES PUISSANCES DES NOMBRES.

Lemme. — *Soit m un nombre entier plus grand que 1, α un nombre plus grand que zéro; on aura*

$$(1) \qquad (1+\alpha)^m > 1 + m\alpha.$$

En effet, on a

$$(1+\alpha)^2 = 1 + 2\alpha + \alpha^2;$$

donc la formule (1) est vérifiée pour $m = 2$. Supposons-la vraie pour $m = n$; démontrons qu'elle est encore vraie pour $m = n + 1$. Si l'on a

$$(1+\alpha)^n > 1 + n\alpha,$$

en multipliant les deux membres par $1 + \alpha$, on a

$$(1+\alpha)^{n+1} > 1 + (n+1)\alpha + n\alpha^2,$$

c'est-à-dire, *a fortiori*,

$$(1+\alpha)^{n+1} > 1 + (n+1)\alpha.$$

La formule (1) subsiste donc pour $m = n + 1$. Or elle est vraie pour $m = 2$: donc elle l'est pour $m = 3$, puis pour $m = 4$, etc.; donc elle est générale.

Théorème I. — *Les puissances successives des nombres*

plus grands que 1 vont en croissant et peuvent dépasser toute limite.

En effet, tout nombre plus grand que 1 peut être représenté par $1+\alpha$, et l'on aura, en appelant n un entier quelconque,

$$(1+\alpha)^n > 1 + n\alpha.$$

La formule précédente montre que, en prenant n suffisamment grand, $(1+\alpha)^n$ pourra être pris plus grand que toute quantité donnée; du reste, il est bien évident que

$$(1+\alpha)^{n+1} > (1+\alpha)^n.$$

Théorème II. — *Les puissances successives des nombres moindres que 1 vont en diminuant et ont zéro pour limite.*

En effet, tout nombre moindre que 1 peut être considéré comme le quotient de l'unité divisée par un nombre $(1+\alpha)$ plus grand que 1, et alors le théorème que nous venons de démontrer rend celui-ci évident.

Théorème III. — *Les racines successives des nombres plus grands que 1 vont en diminuant et ont l'unité pour limite.*

En effet : 1° a désignant un nombre plus grand que 1,

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n(n+1)]{a^{n+1}},$$
$$\sqrt[n+1]{a} = \sqrt[n(n+1)]{a^n};$$

donc évidemment

$$\sqrt[n]{a} > \sqrt[n+1]{a}.$$

2° Je dis que l'on peut toujours prendre n assez grand pour que

(1) $$\sqrt[n]{a} - 1 < \delta,$$

δ désignant une quantité aussi petite que l'on voudra. En effet, de l'inégalité précédente on déduit

$$(2) \qquad a < (1+\delta)^n;$$

or (théorème I)

$$1 + n\delta < (1+\delta)^n.$$

Si donc on prend

$$a < 1 + n\delta,$$

a fortiori l'inégalité (2) sera satisfaite, et par suite (1); pour satisfaire à la question, il suffit, comme on voit, de prendre

$$n > \frac{a-1}{\delta},$$

ce qui revient à dire que la racine $n^{\text{ième}}$ de a a pour limite 1 lorsque n augmente indéfiniment.

THÉORÈME IV. — *Les racines successives d'un nombre moindre que 1 vont en croissant et ont l'unité pour limite.*

Ce théorème est une conséquence du précédent.

V. — DES PROGRESSIONS GÉOMÉTRIQUES DÉCROISSANTES.

Soit

$$a + aq^2 + aq^3 + \ldots + aq^{n-1}$$

une somme de termes en progression géométrique; cette somme est égale, d'après ce que l'on a vu, à

$$a\frac{q^n - 1}{q - 1} \quad \text{ou à} \quad \frac{a}{1-q} - \frac{aq^n}{1-q}.$$

Supposons $q < 1$.

1° Les termes de la progression géométrique qui sont les produits de a par les puissances successives de q iront en décroissant et tendront vers zéro, en vertu du théorème II du paragraphe précédent.

2° La somme des n premiers termes $\frac{a}{1-q} - \frac{aq^n}{1-q}$ ira en croissant et aura pour limite $\frac{a}{1-q}$, puisque q^n tend vers zéro. Ainsi :

THÉORÈME. — *La limite de la somme des n premiers termes d'une progression géométrique dont la raison est moindre que 1 quand n croît indéfiniment est égale au premier terme divisé par la différence entre la raison et l'unité.*

Exemples :

1° $$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2.$$

2° Une fraction périodique telle que 0,3535... est égale à la somme des termes d'une progression géométrique :

$$\frac{35}{100} + \frac{35}{(100)^2} + \frac{35}{(100)^3} + \ldots;$$

sa valeur est $\frac{35}{100} : \frac{1}{1-\frac{1}{100}} = \frac{35}{99}$; ce que l'on savait déjà.

Au fond, la démonstration donnée en Arithmétique est identique avec celle-ci.

VI. — DÉFINITION D'UN SYSTÈME DE LOGARITHMES.

Si l'on considère deux progressions, l'une géométrique commençant par l'unité, l'autre arithmétique commençant

par zéro,

(1) $$1,\ q,\ q^2,\ \ldots,\ q^n,\ \ldots.$$

(2) $$0,\ r,\ 2r,\ \ldots,\ nr,\ \ldots,$$

chaque terme de la progression arithmétique est ce que, d'après Neper, on appelle le *logarithme* du terme de même rang dans la progression géométrique : ainsi nr est le logarithme de q^n.

On pourra, comme l'on voit, former, en variant les raisons q et r, une infinité de systèmes de logarithmes.

Voici une propriété du système (1) et (2) qui va faire comprendre toute l'importance de la théorie qui nous occupe. Soient q^m et q^n deux termes de la progression géométrique, mr et nr les deux termes correspondants de la progression arithmétique; le produit $q^m q^n = q^{m+n}$ est un terme de la progression géométrique; le terme correspondant de la progression arithmétique est $(m+n)r$ ou $mr+nr$. On voit donc que :

THÉORÈME. — *Le logarithme d'un produit est égal à la somme des logarithmes de ses facteurs.*

Théorème extrêmement important. On conçoit en effet que, si tous les nombres avaient des logarithmes connus, on pourrait au moyen de ce théorème convertir les multiplications en additions. Nous allons montrer qu'effectivement on peut faire en sorte que par une généralisation convenable de notre définition tous les nombres acquièrent des logarithmes.

Tout d'abord nous supposerons nos progressions (1) et (2) prolongées vers la gauche et écrites sous les formes

(1) $$\ldots\ \frac{1}{q^2},\ \frac{1}{q},\ 1,\ q,\ q^2,\ \ldots,$$

(2) $$\ldots\ -2r,\ -r,\ 0,\ r,\ 2r,\ \ldots;$$

alors, en supposant (ce qui est conforme à l'usage) $q > 1$, $r > 0$, nous voyons que *les logarithmes des nombres moindres que* 1 *seront négatifs*. Cela posé :

THÉORÈME I. — *Si l'on insère entre deux termes consécutifs de la progression* (1) *un nombre suffisamment grand de moyens, la nouvelle raison différera aussi peu que l'on voudra de l'unité; si entre les termes correspondants de la progression* (2) *on insère le même nombre de moyens, la raison de la nouvelle progression sera en même temps aussi peu différente de zéro que l'on voudra.*

En effet, les raisons des nouvelles progressions seront respectivement

$$\sqrt[m+1]{q}, \quad r:(m+1).$$

Or ces deux quantités ont respectivement pour limites 1 et zéro (p. 202); donc, etc. C. Q. F. D.

THÉORÈME II. — *Désignons par* $1+\alpha$ *la raison de la nouvelle progression géométrique, par* β *la raison de la nouvelle progression arithmétique;* α *et* β *pourront, comme nous avons vu, être pris aussi petits que l'on voudra, et, lorsqu'ils seront suffisamment petits, la différence entre deux termes consécutifs des nouvelles progressions pourra être prise aussi petite que l'on voudra.*

Soient $(1+\alpha)^n$, $(1+\alpha)^{n+1}$ deux termes consécutifs de la progression géométrique; leur différence est

$$(1+\alpha)^n(1+\alpha-1) = \alpha(1+\alpha)^n.$$

Je dis que l'on peut prendre α assez petit pour que

$$\alpha(1+\alpha)^n < \delta, \tag{3}$$

δ désignant une quantité aussi petite que l'on voudra. En

effet, l'inégalité précédente peut s'écrire

$$(4) \qquad \alpha < \frac{\delta}{(1+\alpha^n)}.$$

Prenons alors non-seulement $\alpha < \delta$, mais encore

$$\alpha < \frac{\delta}{(1+\delta)^n};$$

l'inégalité (4) sera alors satisfaite *a fortiori*, et par suite l'inégalité (3), ce qui démontre le théorème que nous avions énoncé relativement à la progression géométrique. La différence entre deux termes consécutifs de la progression arithmétique a pour expression générale

$$(n+1)\beta - n\beta = \beta;$$

elle peut donc être prise aussi moindre que toute quantité donnée.

Il résulte de ces théorèmes que l'on pourra toujours insérer entre les termes des progressions (1), (2) un nombre de moyens assez grand pour que la différence entre un nombre donné N et un certain terme de la progression soit moindre que δ. Soit $(1+\alpha)^p$ le terme de la progression géométrique le plus voisin de N; $n\beta$ sera le terme correspondant de la progression arithmétique; $n\beta$ sera alors le *logarithme de* N *à* β *près*. Or, n croissant indéfiniment, β tend vers zéro et $n\beta$ vers une certaine limite qui est le *logarithme* de N.

La théorie précédente montre la possibilité de la construction d'une Table donnant les logarithmes de tous les nombres avec telle approximation que l'on voudra.

VI. — PROPRIÉTÉS DES LOGARITHMES.

Le logarithme d'un produit de deux facteurs est égal à la somme des logarithmes de ces facteurs.

En effet, soit NN' un produit de deux facteurs s'ils ne font pas partie de la progression géométrique (1) du paragraphe précédent; soient ν et ν' les nombres de cette progression les plus voisins de N et N'. On aura

$$\log \nu + \log \nu' = \log \nu\nu', \tag{5}$$

d'après ce que nous avons vu plus haut. Mais, si l'on suppose que les progressions (1) et (2) soient remplacées par celles que l'on obtient en insérant des nombres indéfiniment croissants de moyens, ν et ν' se rapprocheront de N et N', et $\nu\nu'$ de NN'; $\log \nu$, $\log \nu'$ et $\log \nu\nu'$ tendront alors vers ce que nous avons appelé $\log N$, $\log N'$ et $\log NN'$. La formule (5) deviendra alors

$$\log N + \log N' = \log NN'. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

De là découlent les théorèmes suivants:

THÉORÈME I. — *Le logarithme d'un produit d'un nombre quelconque de facteurs est égal à la somme des logarithmes de ses facteurs.*

En effet, soient a, b, c, d des facteurs; on a

$$\begin{aligned}\log(abcd) &= \log a(bcd) = \log a + \log(bcd),\\ \log(bcd) &= \log b(cd) = \log b + \log cd,\\ \log cd &= \log c + \log d.\end{aligned}$$

On en conclut

$$\log(abcd) = \log a + \log b + \log c + \log d. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

THÉORÈME II. — *Le logarithme d'un quotient est égal au logarithme du dividende moins le logarithme du diviseur.*

En effet, soient D le dividende, d le diviseur, q le quo-

tient. On a

$$D = dq,$$

d'où

$$\log D = \log d + \log q,$$

et par suite

$$\log q = \log D - \log d. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Théorème III. — *Le logarithme d'une puissance d'un nombre est égal au logarithme de ce nombre multiplié par l'indice de cette puissance.*

En effet,

$$\log a^n = \log(aaa\ldots) = \log a + \log a + \ldots = n \log a.$$

C. Q. F. D.

Théorème IV. — *Le logarithme de la racine d'un nombre est égal au logarithme de ce nombre divisé par l'indice de la racine.*

En effet, soit y la racine $n^{\text{ième}}$ de a; on a

$$a = y^n,$$

d'où, par le théorème précédent,

$$\log a = n \log y,$$

et par suite

$$\log y = \frac{1}{n} \log a. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

VII. — USAGE DES TABLES.

Les Tables de logarithmes dont on fait usage donnent les logarithmes *vulgaires*. On appelle ainsi ceux qui sont définis par les progressions

$$\ldots,\ \frac{1}{10},\ 1,\ 10,\ 100,\ 1000,\ \ldots,\ 10^n,\ \ldots,$$

$$\ldots,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n,\ \ldots;$$

la *base* de ce système, c'est-à-dire le nombre qui a pour logarithme 1, est 10.

Les avantages de ce système résultent des propriétés que voici :

Les logarithmes des nombres compris entre 1 *et* 10, 10 *et* 100, 100 *et* 1000, ... *sont compris entre* 0 *et* 1, 1 *et* 2, 2 et 3, ... ; *donc la partie entière d'un logarithme, ou sa* CARACTÉRISTIQUE, *est composée d'autant d'unités que ce nombre contient de chiffres entiers moins* 1.

Les logarithmes des nombres moindres que 1 sont négatifs; or tout nombre négatif compris entre deux entiers $-n$ et $-(n+1)$ peut se mettre sous la forme $-(n+1)+\alpha$, α désignant un nombre positif moindre que 1. Tout logarithme d'un nombre moindre que 1 pourra donc être considéré comme formé d'une partie entière négative, sa *caractéristique,* et d'une partie fractionnaire positive.

Tout nombre compris entre 0 *et* 0,1 *aura son logarithme compris entre* 0 *et* -1 ; *la caractéristique de son logarithme sera donc* -1, *et, en général, la caractéristique d'un nombre décimal dont le premier chiffre est placé au* $n^{ième}$ *rang après la virgule a pour logarithme un nombre dont la caractéristique est* $-n$.

Deux nombres composés des mêmes chiffres écrits dans le même ordre ont des logarithmes qui ne diffèrent que par leurs caractéristiques.

En effet, on a par exemple

$$\log 3782,5 = \log(37,825 \times 100)$$
$$= \log 37,825 + \log 100 = \log 37,825 + 2;$$

les logarithmes de 3782,5 et 37,825 ne diffèrent donc que par un nombre entier, c'est-à-dire que par leurs caractéristiques.

Il existe un grand nombre de Tables de logarithmes; pour en faire usage, il convient de lire l'Introduction.

Je décrirai ici la manière de se servir des Tables de Lalande à sept décimales.

Si l'on veut le logarithme d'un nombre entier compris entre 0 et 10000, on trouve ce nombre inscrit dans la Table dans la colonne Nomb.; son logarithme est à gauche dans la colonne intitulée Logarit. et en face. Entre deux logarithmes de la Table, on a écrit dans la colonne Diff. leur différence.

Pour trouver le logarithme d'un nombre quelconque, on calcule d'abord la caractéristique; cette caractéristique, pour les nombres plus grands que 1, est égale au nombre des chiffres significatifs entiers moins 1. Pour les nombres moindres que 1, elle est négative et égale au nombre qui indique le rang du premier chiffre placé après la virgule. La caractéristique une fois déterminée, on prend pour partie décimale la partie décimale du logarithme du nombre composé des mêmes chiffres que le nombre proposé, mais compris entre 0 et 10000. Voici maintenant comment on trouve ce logarithme.

Exemple. — *Calculer le logarithme de* 189367.

Il suffit de *calculer le logarithme de* 1893,67. A cet effet, on observe que, 1893, 67 tombant entre 1893 et 1894, le logarithme de 1893,67 est compris entre les logarithmes *tabulaires* 3,2771506 et 3,2773800 de 1893 et 1894. Pour trouver la quantité x qu'il faut ajouter au logarithme 3,2771506 de 1893 pour obtenir le logarithme de 1893,67, on prend dans la Table la différence entre log 1893 et *log*. 1894, qui est 0,0002294, et on pose cette proportion, ce qui n'est pas tout à fait exact, mais ce qui fournit une approximation très-suffisante dans la pratique :

Nomb	0.31′30″ Logarit.	Diff.	Nomb	0.32′0″ Logarit.	Diff.	Nomb	0.32′30″ Logarit.	Diff.
1890	3.2764618	2297	1920	3.2833012	2262	1950	3.2900346	2227
1891	3.2766915	2296	1921	3.2835274	2260	1951	3.2902573	2225
1892	3.2769211	2295	1922	3.2837534	2259	1952	3.2904798	2224
1893	3.2771506	2294	1923	3.2839793	2258	1953	3,2907022	2224
1894	3.2773800	2292	1924	3.2842051	2256	1954	3.2909246	2222
1895	3.2776092	2291	1925	3.2844307	2256	1955	3.2911468	2221
1896	3.2778383	2290	1926	3.2846563	2254	1956	3.2913689	2219
1897	3.2780673	2289	1927	3.2848817	2253	1957	3.2915908	2219
1898	3.2782962	2288	1928	3.2851070	2252	1958	3.2918127	2217
1899	3.2785250	2286	1929	3.2853322	2251	1959	3.2920344	2217
1900	3.2787536	2285	1930	3.2855573	2250	1960	3.2922561	2215
1901	3.2789821	2284	1931	3.2857823	2248	1961	3.2924776	2214
1902	3.2792105	2283	1932	3.2860071	2248	1962	3.2926990	2213
1903	3.2794388	2281	1933	3.2862319	2246	1963	3.2929203	2212
1904	3.2796669	2281	1934	3.2864565	2245	1964	3.2931415	2211
1905	3.2798950	2279	1935	3.2866810	2244	1965	3.2933626	2209
1906	3.2801229	2278	1936	3.2869054	2242	1966	3.2935835	2209
1907	3.2803507	2277	1937	3.2871296	2242	1967	3.2938044	2207
1908	3.2805784	2275	1938	3.2873538	2240	1968	3.2940251	2206
1909	3.2808059	2275	1939	3.2875778	2239	1969	3.2942457	2205
1910	3.2810334	2273	1940	3.2878017	2238	1970	3.2944662	2204
1911	3.2812607	2272	1941	3.2880255	2237	1971	3.2946866	2203
1912	3.2814879	2271	1942	3.2882492	2236	1972	3.2949069	2202
1913	3.2817150	2269	1943	3.2884728	2235	1973	3.2951271	2200
1914	3.2819419	2269	1944	3.2886963	2233	1974	3.2953471	2200
1915	3.2821688	2267	1945	3.2889196	2232	1975	3.2955671	2198
1916	3.2823955	2266	1946	3.2891428	2232	1976	3.2957869	2198
1917	3.2826221	2265	1947	3.2893660	2230	1977	3.2960067	2196
1918	3.2828486	2264	1948	3.2895890	2228	1978	3.2962263	2195
1919	3.2830750	2262	1949	3.2898118	2228	1979	3.2964458	2194
1920	3.2833012		1950	3.2900346		1980	3.2966652	

La différence 1 *entre les deux nombres entiers consécutifs* 1893, 1894, *qui comprennent le nombre donne* 1893,67, *est à la différence* 0,67 *entre le nombre donné et le nombre entier immédiatement plus petit, comme la différence* 0,0002294 *entre les deux logarithmes tabulaires des deux nombres entiers qui comprennent le nombre donné est à la différence x entre le plus petit de*

ces deux logarithmes tabulaires et le logarithme cherché. On a donc

$$1 : 0,67 = 0,0002294 : x,$$

d'où

$$x = 0,0001537.$$

On ajoute cette valeur de x au logarithme 3,2771506 de 1893 : la somme 3,2773043 est le logarithme de 1893,67.

Le logarithme de 189367 est donc 5,2773043.

Nous avons maintenant à résoudre la question inverse :

PROBLÈME. — *Trouver à quel nombre appartient un logarithme donné.*

La caractéristique, augmentée d'une unité, indique combien il y a de chiffres dans la partie entière du nombre auquel appartient le logarithme donné. On est donc ramené au cas où la caractéristique est 3. Cela posé :

Quand la caractéristique du logarithme donné est 3, le nombre cherché est compris entre 1000 et 10000.

Pour trouver ce nombre, on cherche le logarithme donné dans les colonnes intitulées LOGARIT.

Lorsque le logarithme donné se trouve dans la Table, le nombre cherché est placé à sa gauche, dans la colonne intitulée NOMB.

Quand le logarithme donné, dont la caractéristique est 3, *ne se trouve pas dans la Table,* il tombe nécessairement entre les logarithmes tabulaires de deux nombres entiers consécutifs de quatre chiffres ; le plus petit de ces deux nombres exprime la *partie entière* du nombre décimal auquel appartient le logarithme donné.

La *partie décimale* du nombre cherché est déterminée par cette proportion :

La différence entre les deux logarithmes tabulaires

qui comprennent le logarithme donné est à la différence entre le logarithme donné et le plus petit de ces deux logarithmes tabulaires comme l'unité est à la partie décimale x du nombre auquel appartient le logarithme donné. On calcule x avec trois décimales.

Exemple. — *Déterminer à quel nombre appartient le logarithme* 3,2773043.

On voit dans la Table que ce logarithme tombe entre les logarithmes 3,2771506 et 3,2773800 des nombres 1893 et 1894; la *partie entière* du nombre cherché est donc 1893.

Pour calculer la *partie décimale x* de ce nombre, on prend dans la colonne intitulée Diff. la différence entre log 1893 et log 1894, qui est 0,0002294; on cherche la différence 0,0001537 entre le logarithme donné et le logarithme tabulaire immédiatement plus petit, et l'on pose la proportion

$$0,0002294 : 0,0001537 = 1 : x,$$

qui revient à

$$2294 : 1537 = 1 : x,$$

d'où

$$x = 0,670.$$

Le logarithme 3,2773043 appartient donc au nombre 1893,67. On verrait de même que le logarithme $\bar{2}$,2773043 appartient au nombre 0,0189367, etc.

UN EXEMPLE DE CALCUL LOGARITHMIQUE.

Pour montrer comment on dispose un calcul logarithmique, nous allons traiter l'exemple suivant : *Calculer x*

donné par la formule

$$x = (0,3678756)^{15} \times \frac{27,325170}{243,51287}.$$

On a

$$\log x = 15 \log 0,3678756 + \log 27,325170 - \log 243.51287$$

$$\log 0,3678756 = \bar{1},5657010$$
$$\log 27,325170 = 1,4365629$$
$$\log 243,51287 = 2,3865219$$

$$15 \log 0,3678756 = \bar{7},4855150$$
$$\log 27,325170 = 1,4365629$$
$$-\log 243,51287 = \bar{3},6134781$$
$$\log x = \bar{8},5355560$$
$$x = 0,0000000343206009.$$

UN MOT SUR LA DÉCOUVERTE DES LOGARITHMES.

L'invention des logarithmes remonte, d'après Montucla et d'après M. Terquem (*Bulletin,* article BENJAMIN BRAMER) à Juste Byrge (Jobst Burgi), qui avait construit une Table en 1610, imprimée à Prague en 1620, et avait indiqué le moyen de simplifier les calculs à l'aide de cette Table.

Mais on attribue généralement l'invention des logarithmes à Jean Neper, qui publia sa découverte en 1614, dans un Livre intitulé *Logarithmorum canonis descriptio*.... Neper n'avait pas tout d'abord fait usage de deux progressions pour définir son système, mais il avait eu recours à des considérations mécaniques à peu près équivalentes. Les logarithmes que l'on appelle aujourd'hui *népériens* ne sont pas de cet auteur, mais bien d'un géomètre nommé Speidel; les logarithmes de Speidel sont d'ailleurs égaux à ceux de Neper, au signe près.

Les logarithmes dits *népériens* ont pour base le nombre $e = 2,71828\ldots$; le choix de cette base sera expliqué plus tard.

Robert Neper, fils de Jean, publia les œuvres posthumes de son père sous le titre *Mirifici logarithmorum canonis constructio*. C'est seulement dans cet Ouvrage que Neper fait connaître sa méthode de construction des Tables et les avantages d'un système dont la base serait 10.

Briggs construisit la première Table de logarithmes vulgaires vers 1618, sous le titre de *Logarithmorum chilias prima;* son travail fut complété par Gellibrand et publié sous le titre de *Trigonometria britannica.*

Les Tables de Vlacq à onze décimales (1628 et 1636), de Vega à dix décimales, de Gardinier, revues par Callet, ont été célèbres; citons les Tables construites sous la direction de Prony pour le cadastre, qui n'ont pas été imprimées et dont un exemplaire est déposé à la bibliothèque de l'Institut.

Les Tables de Schrön, publiées chez Gauthier-Villars, nous paraissent les plus commodes pour les élèves; mais les petites Tables à cinq décimales de Lalande (même éditeur) sont plus portatives et plus commodes pour des ingénieurs.

VIII. — RÈGLES D'INTÉRÊT COMPOSÉ.

De l'argent est placé à intérêt composé lorsqu'à la fin de chaque année on place les intérêts avec le capital.

Soient a un capital, r l'intérêt de 1 franc au bout d'un an; proposons-nous de calculer la valeur A de ce capital au bout de n années.

Au bout d'un an, 1 franc est devenu $(1+r)$; a francs sont donc devenus $a(1+r)$, d'où l'on voit que, pour obtenir la valeur d'un capital placé pendant un an, il suffit

de multiplier par $(1+r)$ la valeur primitive de ce capital. Si donc on place le capital a, qui est devenu $a(1+r)$, encore un an, il deviendra $a(1+r)(1+r)$ ou $a(1+r)^2$; si l'on place encore ce capital pendant un an, il deviendra $a(1+r)^2(1+r)$ ou $a(1+r)^3$, etc., et enfin, au bout de n années, il deviendra $a(1+r)^n$. On a donc

$$A = a(1+r)^n.$$

C'est dans cette formule que consiste la règle d'intérêt composé; elle sert à résoudre plusieurs problèmes que nous allons examiner successivement.

Problème I. — *Trouver ce que devient une somme a placée au taux de* $100r$ *pour* 100 *pendant un temps t.*

Soient n l'entier contenu dans t, φ la fraction qui complète le temps t; on aura

$$A = a(1+r)^n + a(1+r)^n \varphi r,$$

φ étant exprimé en fraction d'année.

Problème II. — *Quel est le capital a qui, placé à* $100r$ *pour* 100, *devient* A *au bout du temps t?*

Si l'on pose $t = n + \varphi$, n étant le plus grand entier contenu dans t, on a

$$A = a(1+r)^n + a(1+r)^n \varphi r,$$

d'où l'on tire

$$a = \frac{A}{(1+r)^n(1+\varphi r)}.$$

Problème III. — *Au bout de combien de temps le capital a placé à* $100r$ *pour* 100 *devient-il* A?

Si l'on désigne par $n + \varphi$ le temps cherché, n désignant

toujours le plus grand entier contenu dans $n+\varphi$, on a

$$(1)\quad A = a(1+r)^n + a(1+r)^n\varphi r = a(1+r)^n(1+\varphi r),$$

et, en prenant les logarithmes,

$$\log A = \log a + \log(1+\varphi r) + n\log(1+r)$$

ou bien

$$n = \frac{\log A - \log a}{\log(1+r)} - \frac{\log(1+\varphi r)}{\log(1+r)}.$$

Mais $\frac{\log(1+\varphi r)}{\log(1+r)}$ est moindre que 1 ; on a donc, à moins d'une unité près,

$$n = \frac{\log A - \log a}{\log(1+r)}.$$

Si donc on évalue $\frac{\log A - \log a}{\log(1+r)}$ par défaut à moins d'une unité près, on aura n; n une fois connu, l'équation (1) fera connaître φ par la résolution d'une équation du premier degré.

PROBLÈME IV. — *A quel taux faut-il placer la somme a pour obtenir la somme* A *au bout du temps $n+\varphi$?*

On partira toujours de la formule

$$A = a(1+r)^n + a(1+r)^n r\varphi,$$

ou bien

$$(1)\qquad A = a(1+r)^n(1+r\varphi).$$

Le taux qui dépend de r s'obtient par la résolution d'une équation du $(n+1)^{\text{ième}}$ degré; mais on peut profiter de la petitesse de r pour la résoudre par approximations successives, et l'on pose d'abord

$$A = a(1+r_1)^n.$$

De là on tire une première valeur de r,

$$r_1 = \frac{\log A - \log a}{n} - 1,$$

trop petite. Si dans l'équation (1) on remplace le facteur r du produit $r\varphi$ par r_1, on trouve, en résolvant par rapport à r, une seconde valeur approchée r_2 de r,

$$r_2 = \frac{\log A - \log[a(1 + r_1\varphi)]}{n} - 1,$$

trop grande. En opérant avec r_2 comme avec r_1, on obtient une valeur r_3 trop petite, et ainsi de suite.

IX. — DES ANNUITÉS.

Une annuité est une somme que l'on paye chaque année, soit pour éteindre une dette, soit pour se réserver un capital.

PROBLÈME I. — *Pendant n années on paye a francs au commencement de chaque année : on demande quel capital on aura formé au bout des n années, le taux de l'argent étant* $100r$ *pour* 100.

Les a francs placés au commencement de la première année sont devenus $a(1+r)^n$.

Les a francs placés au commencement de la deuxième année sont devenus $a(1+r)^{n-1}$.

....

Les a francs placés au commencement de la $n^{\text{ième}}$ année sont devenus $a(1+r)$.

On pourra donc retirer, au bout de n années,

$$a(1+r)^n + a(1+r)^{n-1} + a(1+r)^{n-2} + \ldots + a(1+r),$$

c'est-à-dire (p. 198)

$$a\frac{(1+r)^n-1}{(1+r)-1}(1+r),$$

ou bien

$$a[(1+r)^n-1]\left(1+\frac{1}{r}\right).$$

Problème II. — *Quelle annuité a faut-il payer pour éteindre une dette* A *en n années, le taux étant de* $100r$ *pour* 100?

Au bout de n années, A est devenu $A(1+r)^n$; en désignant par a l'annuité qu'il faut payer à la fin de chaque année, on devra poser

$$A(1+r)^n = a(1+r)^{n-1} + a(1+r)^{n-2} + \ldots + a,$$

ou bien

$$A(1+r)^n = a\frac{(1+r)^n-1}{(1+r)-1},$$

ou enfin

$$A(1+r)^n = a\frac{(1+r)^n-1}{r},$$

d'où l'on tire

$$a = A\frac{(1+r)^n-1}{(1+r)^n r}.$$

Problème III. — *Au bout de combien de temps aura-t-on éteint une dette* A *par une annuité de a au taux de* $100r$ *pour* 100?

En désignant par n ce temps, il faudra poser

$$A(1+r)^n \leqq \frac{a}{r}[(1+r)^n-1].$$

On résoudra par rapport à n, en ayant soin de choisir

le plus petit nombre entier satisfaisant à l'inégalité. En $n-1$ années, la dette ne sera pas tout à fait éteinte; on fera alors la différence

$$A(1+r)^{n-1}-\frac{a}{r}[(1+r)^n-1]=\delta.$$

On trouvera une quantité δ inférieure à A : cette somme resterait à payer. Si donc on veut attendre encore un an, la dernière annuité devra être $\delta(1+r)$.

Problème IV. — *Quelle somme faut-il placer pour obtenir pendant n années une rente de a francs, le taux étant* $100r$ *pour* 100?

En désignant par x la somme qu'il faut placer, cette somme vaudra, au bout de n années, $x(1+r)^n$; la rente reçue équivaut à

$$a(1+r)^{n-1}+a(1+r)^{n-2}+\ldots+a=a\frac{(1+r)^n-1}{r},$$

puisque, à chaque fois que l'on retire a francs, c'est autant d'argent qui pour le banquier ne rapporte pas d'intérêt. On a donc

$$x(1+r)^n=\frac{a[(1+r)^n-1]}{r}.$$

On tire de là

$$x=\frac{a[(1+r)^n-1]}{(1+r)^n r}.$$

Faisons $n=\infty$; nous aurons la somme y qu'il faut placer pour obtenir une rente perpétuelle de a francs :

$$y=\lim\frac{a[(1+r)^n-1]}{(1+r)^n r}=\lim\frac{a}{r}\left[1-\frac{1}{(1+r)^n}\right]=\frac{a}{r}.$$

Ainsi la somme qu'il faut placer pour obtenir la rente perpétuelle est $\frac{a}{r}$.

Pour tout ce qui concerne l'intérêt de l'argent, on consultera avec fruit la *Théorie mathématique des opérations financières*, de M. Charlon.

EXERCICES.

1. Trouver le produit des termes d'une progression géométrique.

2. Dans les formules

$$s = \frac{(a+l)n}{2}, \quad l = a + \overline{n-1}\,r,$$

relatives aux progressions arithmétiques, on peut se donner deux des quantités a, l, n, r et se proposer de calculer les deux autres.

3. Problème analogue pour les progressions géométriques.

4. Les termes des progressions géométriques croissent avec une rapidité qui dépasse l'imagination. Voici quelques exemples qui pourront convaincre le lecteur.

Trouver la quantité de blé obtenue en plaçant 1 grain sur la 1re case d'un échiquier, 2 sur la 2e, 4 sur la 3e, et ainsi de suite en doublant toujours jusqu'à la 64e. Cette quantité de blé avait été demandée, dit-on, par l'inventeur du jeu d'échecs comme récompense de sa découverte. (Hâtons-nous de dire que cette anecdote est d'une authenticité fort douteuse.)

5. En supposant qu'Adam ait eu 3 fils, chacun d'eux 3 autres fils, et ainsi de suite; en supposant de plus que la vie d'un homme soit de 1 siècle, on demande quelle devrait être actuellement la population mâle du globe.

6. En supposant que le prix du pain augmente de $\frac{1}{10}$ de sa valeur chaque année, on demande quel devrait être aujourd'hui le prix de

la livre de pain, sachant que du temps d'Adam ce prix s'élevait à 1 centime les 100 kilogrammes.

7. Si la population d'un empire s'est accrue en 200 ans de $\frac{1}{10}$ de sa valeur primitive, calculer l'accroissement annuel moyen de la population.

8. Démontrer que l'on peut construire une progression géométrique, connaissant le nombre des termes, la somme de ces termes et la somme de leurs carrés.

9. Trouver cinq nombres en progression arithmétique connaissant leur somme et leur produit.

10. Trouver la somme des termes de la suite

$$1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1}.$$

11. On donne un triangle rectangle ABC en A; du sommet A on mène AA' perpendiculaire sur BC, du point A' on mène A'A'' perpendiculaire sur AC, du point A'' on mène A''A''' perpendiculaire sur A'C,... : trouver la limite de la somme

$$AA' + A'A'' + A''A''' + A'''A^{\text{IV}} + \ldots.$$

12. Un polygone régulier de n côtés est inscrit dans un cercle de rayon donné R; on mène les rayons de ce polygone et on le décompose ainsi en triangles isoscèles, tels que OAB; dans OAB on inscrit un cercle K_1, on trace un second cercle K_2 tangent à K_1 et aux droites OB et OA plus petit que le cercle K_1; on trace un troisième cercle K_3 plus petit que K_2 et tangent à K_2 ainsi qu'aux droites OA, OB et ainsi de suite. 1° Calculer pour un polygone d'un nombre de côtés donné n la limite de la somme des aires des cercles K_1, K_2, K_3, ... 2° Le nombre n croissant indéfiniment, calculer la limite de la somme de tous les cercles analogues à K_1, K_2, ...; en d'autres termes, calculer la limite de $n\,(K_1 + K_2 + K_3 + \ldots)$ pour $n = \infty$.

14. Un vase plein, de volume V, contient de l'eau salée, et dans cette eau il y a en dissolution un poids p de sel. On vide ce vase, et l'on admet qu'il reste adhérent aux parois un volume v de liquide. On remplit ce vase d'eau pure et on le vide de nouveau pour le rincer, et ainsi de suite un nombre de fois représenté par n. Prouver que,

quel que soit n, le vase V contiendra toujours du sel; calculer le poids x de sel qu'il contiendra après la $n^{\text{ième}}$ opération.

15. Quelle somme faut-il placer actuellement pour obtenir dans p années une rente de a francs payable pendant n années?

16. Au bout de combien de temps un capital placé au taux r est-il doublé, triplé, ...?

17. A quel taux faut-il placer un capital pour le doubler en n années?

18. Calculer le logarithme de 2 à un centième près dans le système de logarithmes dont la base est 16.

FIN DE LA PREMIÈRE PARTIE.

TABLE DES MATIÈRES.

PREMIÈRE PARTIE.

ERRATA.

Page 150, la formule par laquelle se termine le Chapitre est fausse, mais le lecteur la corrigera facilement avec un peu d'attention; elle est d'ailleurs donnée exactement p. 33, 3e exercice.

Page 154, ligne 2, *au lieu de* $-a_2$, *lisez* a_2.

Page 156, lignes 13 et 14, *au lieu de* $\sqrt{a}$, *lisez* $\sqrt{A}$.

Page 157, ligne 8, *au lieu de* carrés, *lisez* rendus.

4875 PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS, QUAI DES AUGUSTINS, 55.

ERRATA.

Page 153, exercice 11, *au lieu de :* le déterminant $\Sigma \pm a_{11}\, a_{22} \ldots a_{nn}$, *lisez :* le déterminant $\Sigma \pm a_{11}\, a_{22} \ldots a_{n+1,n+1}$, dans lequel $a_{n+1,i} = a_{i,n+1} = 1$, pour $i < n + 1$ et dans lequel $a_{n+1,n+1} = 0$.

